

基态八重态重子质量的手征描述

任修磊^{1,2}, 耿立升^{1,2}, 孟杰^{1,2,3}

1. 北京航空航天大学物理科学与核能工程学院, 北京, 100191
2. 北京航空航天大学宇宙中的核物理交叉研究中心, 北京, 100191
3. 北京大学物理学院, 核物理与核技术国家重点实验室, 北京, 100871

E-mail: lisheng.geng@buaa.edu.cn

March 8, 2015

摘要

质量作为物质最基本的属性，其起源一直是物理学研究的根本问题之一。根据物质层次的划分，理解可见宇宙物质（能量）组成的关键在于理解核子（基态重子）的质量。现代粒子物理与原子核物理研究指出，基态重子质量的绝大部分来自强相互作用。然而，由于色禁闭现象，强相互作用的基本理论—量子色动力学—在低能区无法解析求解，导致很长一段时期对基态重子质量的研究不得不借助于各种唯象模型。二十一世纪以来，随着计算机运算能力的发展和算法的持续改进，格点量子色动力学模拟取得了令人瞩目的成绩，使得人类从第一原理出发计算基态重子的质量，进而定量地理解质量的起源成为可能。另一方面，受到计算资源的限制，目前绝大部分格点量子色动力学模拟必须采用比物理值大的轻夸克质量、不够大的盒子体积和不够小的格点间距。因而，为了从格点量子色动力学模拟中提取感兴趣的观测量的物理值，必须对格点数据进行如下三种延拓：手征延拓将轻夸克质量延拓到物理值（即 $m_q \rightarrow m_q^{\text{phys.}}$ ），有限体积修正将有限的四维空间延拓到无穷大（即 $V = L^4 \rightarrow \infty$ ），连续性延拓将有限格点间距延拓到零（即 $a \rightarrow 0$ ）。手征微扰理论为开展这些延拓提供了必要的理论基础。作为量子色动力学的低能有效理论，手征微扰理论原则上可以模型无关地描述强相互作用物理。但随着手征阶数的升高，仅仅依靠实验数据无法完全确定理论中未知的低能常数。高统计量的格点量子色动力学模拟数据的出现为解决这一难题提供了新的思路，从而使得基于高阶手征微扰理论的研究成为可能。本文将简要介绍当前基于协变重子手征微扰理论对基态八重态重子质量及格点量子色动力学模拟数据的研究。

关键词：重子质量，手征微扰理论，格点量子色动力学，重子 sigma 项。

目 录

1 引言	1
1.1 物质的层次	1
1.2 物质的质量起源	3
1.3 从第一原理出发计算强子的质量	3
1.4 本文框架	5
2 格点量子色动力学模拟重子质量	6
2.1 格点量子色动力学简介	6
2.2 基态重子质量的提取方法	7
2.3 $N_f = 2 + 1$ 格点计算的八重态重子质量	8
3 重子手征微扰理论	10
3.1 有效场论	10
3.2 手征对称性及其破缺	11
3.3 介子手征微扰理论	13
3.4 重子手征微扰理论	13
4 次次领头阶的八重态重子质量	17
4.1 八重态重子质量公式	17
4.2 有限体积修正效应	18
4.3 有限格点间距的离散效应	19

5	协变手征微扰理论对格点 QCD 重子质量模拟的系统研究	24
5.1	八重态重子质量的轻夸克质量依赖	24
5.2	虚的十重态重子的效应	26
5.3	有限格点间距的离散效应	27
6	八重态重子 σ 项的精确预言	30
6.1	精确确定 σ 项的三个关键因素	30
6.2	格点质量数据的拟合结果	32
6.3	重子 σ 项的结果及讨论	33
7	总结与展望	35

1 引言

质量作为物理学的基本概念之一，最初由艾萨克·牛顿 (Isaac Newton) 在 1687 年发表的《自然哲学的数学原理》一书中引入。在牛顿力学中，质量是描述物体惯性的量度，通常称为惯性质量，也就是牛顿第二定律 $F = ma$ 中的 m 。1916 年，阿尔伯特·爱因斯坦 (Albert Einstein) 创立的广义相对论指出物质处在本身固有的引力场中，具有引力质量，用于描述物质产生引力场的强度。在万有引力定律 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 中， m_1 和 m_2 就是所谓的引力质量。现代科学研究表明，惯性质量和引力质量是等价的。

从物理学的角度来看，质量起源可追溯到构成物质世界最基本组成单元的质量。为此，首先简要介绍物质世界的最基本组成单元及其相互作用。

1.1 物质的层次

关于物质的本源，早在两千五百年前西方的古希腊哲学家和东方的印度、中国哲学家们对这一问题就有了初步的思考。西方哲学提出了原子论，认为物质经过有限次分割后，最后剩下无法分割的原子 (atom)。印度哲学则认为物质是由土、水、气、火四种基本元素组成，而中国的五行学说认为大自然由金、木、水、火、土五种要素构成。需要注意的是，这些思考还仅仅是朴素的“本体论”，并不属于现代意义的科学认知。1661 年爱尔兰自然哲学家罗伯特·波义耳 (Robert Boyle) 在《怀疑派的化学家》一书中提出组成物质的要素并非只有四种古典元素。

1869 年，俄国科学家德米特里·门捷列夫 (Dmitri Mendeleev) 发现了元素的周期规律。在《元素性质与原子量关系》的论文中，他将当时已知的 63 种元素列在周期表中，首次提出了元素周期表。1897 年，约瑟夫·汤姆逊 (Joseph Thomson) 发现处在电场中的阴极射线发生偏转，并计算了阴极射线粒子的荷质比，进而发现了电子 [1]。为此，汤姆逊获得了 1906 年的诺贝尔物理学奖。作为人类发现的第一个亚原子，电子的发现被认为是现代粒子物理的开端。1911 年，汤姆逊的学生欧内斯特·卢瑟福 (Ernest Rutherford) 领导的课题组在利用 α 粒子轰击金箔片的实验中发现大部分 α 粒子直接通过金箔，只有极小部分粒子有大角度的散射或者反射回来。为了解释这一现象，卢瑟福提出了著名的原子核“核式结构”模型 [2]。该模型指出：原子的绝大部分质量集中在直径很小的核心区域，被称为原子核；电子在原子核外作轨道运动。在此之后的二十年时间里，物理学家对原子核的组成进行了广泛的讨论。当时公认原子核是由质子构成的，为了得到正确的电荷数，原子核中还需要含有电子。但随后量子力学指出，原子核中不可能存在电子。1932 年，英国物理学家詹姆斯·查德威克 (James Chadwick) 通过 α 粒子轰击 ^{10}B 靶核，得到 ^{13}N 子核和另一种质量接近于质子的中性粒子，查德威克将其命名为中子 [3]。中子的发现表明原子核是由质子和中子组成的。凭借中子的发现，查德威克于 1935 年获得了诺贝尔物理学奖。至此，人们对物质微观世界的认识是：原子由原子核和电子组成，而原子核由质子和中子组成。

之后，在对宇宙射线的探测和研究过程中，陆续发现了正电子 [4]、 μ 子 [5, 6]、 π 介子 [7] 等。在十九世纪五六十年代，随着高能粒子加速器的投入运行，研究人员发现了更多的粒子，其中一部分是理论预言的，但绝大部分是未知的新粒子。当时人们就认为新发现的一百多种粒子不可能都是基本的，它们应该有内部结构，由其它更为基本的粒子组成。1957 年，美国实验物理学家罗伯特·霍夫斯塔特 (Robert Hofstadter) 利用能量为 10 亿电子伏特 (eV) 的电子轰击质子和 α 粒子。通过探测末态电子散射的分布，发现质子并不是点粒子，其电荷分布大约在 1 fm 左右。同样整体不带电的中子在 1 fm 左右的空间中也呈现出正负电荷的分布 [8]。以上发现使得人们确信新发现的粒子是由更基本的粒子组成的。凭借这个发现，霍夫斯塔特和鲁道夫·穆斯堡尔 (Rudolf Mössbauer) 共同分享了 1961 年的诺贝尔物理学奖。

为了给这一百多种新粒子分类，理论物理学家先后提出了粒子分类系统和超多重态理论等方法。1964 年，美国物理学家默里·盖尔曼 (Murray Gell-Mann) 和乔治·茨威格 (George Zweig) 分别独立地引入夸克 (quark) 的概念 [9, 10, 11]。夸克模型认为像质子、中子这一类粒子由更基本的夸克构成。

表 1: 六味夸克的基本量子数和质量 [18]

夸克	符号	自旋	电荷	重子数	奇异数	粲数	底数	顶数	质量
上	u	1/2	+2/3	1/3	0	0	0	0	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ MeV
下	d	1/2	-1/3	1/3	0	0	0	0	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ MeV
奇异	s	1/2	-1/3	1/3	-1	0	0	0	95 ± 5 MeV
粲	c	1/2	+2/3	1/3	0	+1	0	0	1.275 ± 0.025 GeV
底	b	1/2	-1/3	1/3	0	0	-1	0	4.18 ± 0.03 GeV
顶	t	1/2	+2/3	1/3	0	0	0	+1	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.71$ GeV

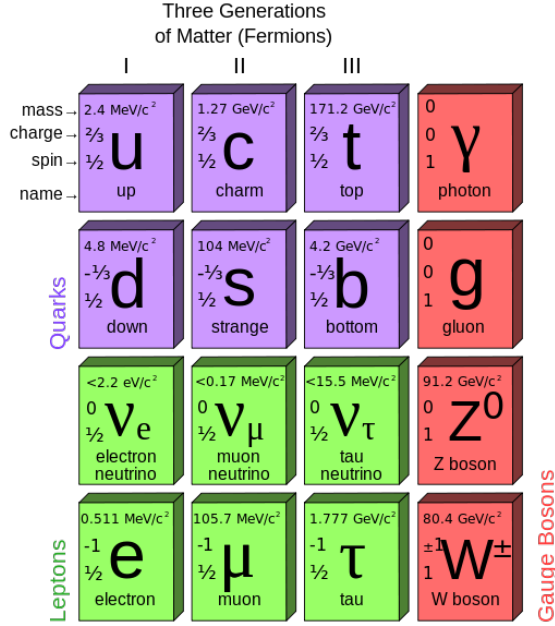


图 1: 标准模型中基本粒子的分类 [18]

夸克具有分数电荷 $+2/3e$ 或 $-1/3e$ (电子电荷为 $-e$), 重子数为 $1/3$ 。最初, 在夸克模型中利用三种夸克, 上夸克 (u)、下夸克 (d) 和奇异夸克 (s) 及相应的反夸克, 就可以解释当时已发现的所有强相互作用粒子。夸克模型所预言的新粒子 (Ω^-) 于 1964 年被实验发现 [12], Ω^- 粒子的质量与理论预言一致。随着高能加速器的不断升级和粒子探测技术的飞速发展, 科学家们又陆续发现了粲夸克 (c) [13, 14], 底夸克 (b) ¹ [15]和顶夸克 (t) [16, 17]。至此, 实验共发现了六种夸克: u 、 d 、 c 、 s 、 t 、 b 。一种夸克可以用味道 (flavor) 这一新的量子数来标记。每味夸克可以带有红、绿和蓝三种颜色中的一种 ²。表 1 给出了六种夸克的量子数和质量。综上, 今天人们所理解的原子图像为: 原子由原子核和电子组成, 原子核由质子和中子组成, 而质子、中子则由更为基本的夸克组成。

以上的基本粒子通过如下基本相互作用组成可见的物质世界: 引力相互作用、电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用。其中引力相互作用是长程力, 支配着宏观物体之间的运动。电磁相互作用是目前人们了解最为清楚的一种相互作用, 其传播子是光子, 可以通过量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 逐阶微扰展开精确计算。强相互作用是一种短程相互作用, 其作用范围为 1 fm 量级。量子色动力学 (quantum chromodynamics, QCD) 是描述强相互作用的基本理论, 传递强相互作用的粒子是自旋为 1, 质量为零的胶子。强相互作用具有渐近自由性的性质, 其跑动耦合常数在高能区很小, 可以微扰求解 (即微扰量子色动力学), 而在低能区较大, 导致人们对低能区的强相

¹在文献中也有人称其为美 (Beauty, b)

²色 (color) 是一种新的内禀自由度, 并不对应真实的颜色。

互作用物理的认知还不是很清楚。弱相互作用也是一种短程力，作用距离很短 (约为 0.01-0.1 fm)。原子核的 β 衰变现象就是由弱相互作用控制的。弱电理论指出，弱相互作用是通过交换质量很重的 W^\pm 及 Z^0 中间玻色子传递的。现代观点认为，可见的物质世界正是由前面提到的基本粒子在上述四种相互作用下形成的。

通过其参与的相互作用的不同，如图 1 所示，基本粒子可以分成以下几类：(1) 夸克，参与强相互作用的费米子，共有 36 种；(2) 轻子，参与电磁相互作用和弱相互作用的费米子，共有 12 种；(3) 规范玻色子，传递相互作用的玻色子，共有 4 种： γ 、 g 、 W^\pm 、 Z^0 。

1.2 物质的质量起源

质量作为物质最基本、最重要的属性，其起源在某种意义上也可以认为是物质的起源。质量的起源一直是科学家探索物质世界的热点问题，也是哲学家力图理解世界本源的终极哲学问题。即使到了今天，这个问题也没有完全得到解决 [19]。

根据现代物质结构组成，由于分子间的范得瓦尔斯力很弱，其引起的结合能贡献可以忽略，所以物质质量的来源可以归结为原子的质量起源。原子由原子核和核外电子组成，其中电子的质量很小 (511 keV，仅为核子质量的 1/1836)，结合能更小 (eV 量级)，因而原子的质量主要来源于原子核的质量。原子核由质子和中子组成，但质子和中子的结合能与其质量相比很小 (不到 1%)。因此，可见物质的质量绝大部分来源于质子和中子本身。量子色动力学理论指出，质子由 u 、 u 、 d 三个价夸克组成，中子由 u 、 d 、 d 三个价夸克组成。夸克的质量约为 3 ~ 6 MeV，而核子的质量约为 940 MeV。三个价夸克的质量还不到核子质量的 1%。很显然，与原子的质量主要来源于原子核和电子的质量不同，核子的质量并非是由组成其价夸克质量的简单相加。研究表明，由 u 、 d 、 s 轻夸克形成的强子，其质量的绝大部分来源于非微扰强相互作用。但由于量子色动力学跑动耦合常数在低能区远大于 1，传统的微扰理论处理失效，需要借助格点量子色动力学模拟、低能区的有效理论或其它唯象模型。本文主要利用手征微扰理论，结合格点量子色动力学模拟，模型无关地研究由低能强相互作用贡献的强子质量部分。

以上的讨论并没有涉及电子、夸克质量的来源。根据粒子物理的标准模型，基本粒子的质量是通过 Brout-Englert-Higgs 机制 [20, 21, 22] 获得的。而 Brout-Englert-Higgs 机制的实现是建立在一种非常重的 Higgs 粒子场存在的基础上。欧洲核子中心 (CERN) 大型强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC) 的一个主要物理目标就是寻找 Higgs 粒子，并最终于 2012 年发现了其存在的证据 [23, 24]。比利时物理学家弗朗索瓦·恩格勒特 (Francois Englert) 和英国物理学家彼得·希格斯 (Peter W. Higgs)，因为 Brout-Englert-Higgs 机制的原创性理论工作，分享了 2013 年的诺贝尔物理学奖。基本粒子的质量起源不是本文的主要内容，感兴趣的读者可以参看王青 2009 年在《物理》上的题为“再论质量的起源”一文 [25]。

1.3 从第一原理出发计算强子的质量

格点量子色动力学 (lattice quantum chromodynamics, LQCD，简称格点 QCD)，是从第一原理出发、模型无关地理解低能强相互作用物理的有力工具。最初由诺贝尔物理学奖获得者肯尼斯·威尔逊 (Kenneth Wilson) 教授提出 [26]。格点 QCD 的基本思想是在四维欧几里得时空中，直接离散化量子色动力学的作用量，将其定义在有限的四维盒子中，通过蒙特卡罗重点采样技术计算物理量的期望值。因此，格点 QCD 计算需要较多的计算资源，很多情况下需要借助大型的超级计算机。为了检验格点 QCD 描述低能区强相互作用物理的可靠性，研究最简单的轻强子谱 (赝标介子八重态、重子八重态、重子十重态) 是必要的。最初由于计算资源和数值计算方法的限制，绝大多数的格点模拟都采用“淬火近似” (quenched approximation)，即只包含价夸克场，冻结海夸克自由度，不考虑夸克间的对产生和夸克-反夸克的湮灭现象 [27, 28]。进一步的研究系统地考虑了有限体积修正和连续延拓 [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]。此后，随着计算能力的提高和算法的改进，格点模拟开始考虑海夸克贡献，但此时价夸克和海夸克的质量不同，所以被称为“部分淬火近似” (partial quenched

approximation) [36, 37]。

近些年，随着计算能力的进一步提高，完全动力学的格点量子色动力学计算成为可能，作为格点最容易计算的物理量之一，基态重子的质量谱已经由若干个格点计算合作组进行了系统研究 [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]。这里需要特别指出的是，Budapest-Marseille-Wuppertal (BMW) 格点合作组的计算结果对应的最小 π 介子质量为 $M_\pi \simeq 190$ MeV，非常接近其物理质量，且具有很高的统计性。通过格点数据的手征延拓，得到物理点处的八重态重子质量和实验值非常接近，研究结果发表在《科学》杂志上 [39]。虽然格点 QCD 在计算八重态重子质量方面取得了很大的进展，但作为离散化数值求解方法，其模拟一方面受到本身固有限制 (如格点盒子长度 L 和格点间距 a 必须取有限值)；另一方面还受到计算资源的限制，(大部分) 不得不采用大于物理值的轻夸克质量³，格点盒子长度 L 不够大，格点间距 a 不够小。因此，为了得到感兴趣观测量的物理值，格点计算结果需要考虑手征延拓 ($m_q \rightarrow m_q^{\text{phys.}}$)，有限体积修正 ($V = L^4 \rightarrow \infty$) 和有限格点间距的离散效应 ($a \rightarrow 0$)。

手征微扰理论作为低能区量子色动力学的有效场论，在研究非微扰强相互作用物理中扮演着重要角色 [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]。并且手征微扰理论为研究格点 QCD 模拟的轻夸克质量依赖、格点有限体积依赖和格点间距的离散效应提供了一个模型无关的基本理论框架。质量作为强子的一个基本的静态性质，在过去的几十年间受到了广泛的关注。关于介子，利用手征微扰理论计算 π , K , η 等轻介子质量方面取得了很大的成功 [52]。有关介子手征微扰理论的近期应用，可参看综述文献 [62]。关于单重子系统，将手征微扰理论扩展到包含重子自由度时会遇到破坏系统计阶规则 (power counting) 的问题 [53]。为了解决这一问题，人们先后引入了非相对论的重重子 (Heavy Baryon, HB) 手征微扰理论 [63]，协变的红外 (Infrared, IR) 手征微扰理论 [64] 和 Extended-On-Mass-Shell (EOMS) 手征微扰理论 [65, 66]。在重重子手征微扰理论的框架下，人们还试图通过唯象地引入形状因子的方法来改善理论的收敛性质，例如 Finite Range Regularization (FRR) [67, 68, 69] 和截断方法 (cutoff scheme) [70]。在协变理论框架下，Lutz 等人提出了 partial summation 重整化方法 [71, 72]。

核子除了含有 u 、 d 价夸克，还含有海夸克，特别是奇异海夸克。在过去的几十年里，基于包含奇异夸克贡献的 SU(3) 重重子手征微扰理论，基态八重态重子的质量得到了系统的研究 [69, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93]。早期大部分的计算仅仅局限在次次领头阶 (next-to-next-to-leading order, NNLO)，这是因为手征微扰理论中存在一些未知的低能常数 (low energy constants, LECs)，计算到次次次领头阶 (next-to-next-to-next-to-leading order, N³LO) 将会引入更多的未知低能常数，其数值不能仅仅通过基态重子质量的实验值得到确定。格点量子色动力学模拟数据的出现为解决上述问题提供了新的思路。

为了研究格点 QCD 模拟数据，必须考虑格点计算是在一个有限的四维空间中进行的，因此模拟数据本身并不对应真实的连续时空的物理量。首先，有限的四维空间必然导致所谓的有限体积修正效应。早期基于手征微扰理论对这一效应的研究多在 SU(2) 空间中进行，通常采用重重子或者红外手征微扰理论 (如 [94, 95])。近期，在 u 、 d 、 s 三味空间中，基于重重子手征微扰理论 [46] 和 EOMS 重重子手征微扰理论 [83] 对八重态重子的格点有限体积修正进行了研究，发现协变的红外方法和 EOMS 方法给出相同的有限体积修正效应，且都优于重重子手征微扰理论 [83]。

其次，有限格点间距会引入离散效应。利用手征微扰理论研究格点模拟数据，原则上需要先将格点数据进行连续延拓。这是因为手征微扰理论描述的是连续空间的量子色动力学，并不适用于格点间距不为零的情况。在过去的十几年里，基于 Symanzik 有效理论 [96, 97, 98, 99] 对有限格点间距引起的离散效应的研究有了很大进展，发展出了基于 Wilson 费米子 (WChPT)、Staggered 费米子 (SChPT) 和 twisted mass 费米子 (tmChPT) 的手征微扰理论。在 WChPT 的框架下，针对介子性质与重子性质做了很多研究 [100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108]。类似的研究在 SChPT [109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116] 和 tmChPT [117, 118, 119, 120, 121, 122, 123] 的框架下也取得了很大进展。如何确定出现在 WChPT 理论中与有限格点间距相关的未知低能常数一直是类似研究必须面对的问题。近期，在这方面有了一些可喜的进展 [124, 125, 126, 127, 128]。

³目前也有少量的计算已经可以利用物理的轻夸克质量 [47, 48, 49]。

此外，在 $SU(3)$ 重子手征微扰理论的框架下，十重态重子的贡献需要认真对待。这是因为八重态重子、十重态重子平均质量差别仅为 $\delta \sim 300$ MeV，这一数值和 π 介子的质量较为相近，并低于 K 和 η 介子的物理质量。文献 [73] 首次在重重子手征微扰理论中加入虚的十重态重子贡献，并将八重态重子质量计算到 $\mathcal{O}(p^3)$ ，指出虚的十重态重子贡献的重要性。之后的研究 [74] 发现在重重子手征微扰理论中，十重态重子的贡献开始于 $\mathcal{O}(p^4)$ 。另外，对于自旋依赖的相关物理量，虚的十重态重子的贡献在重重子手征微扰理论中必不可少，例如磁矩 [129] 和轴矢形状因子 [130, 131]。利用 EOMS 协变手征微扰理论研究八重态重子磁矩时，八、十重态重子与八重态介子的耦合采用自洽耦合方式，发现虚的十重态重子的贡献很小可以忽略 [132]。另一方面，在次次领头阶，虚的十重态重子的贡献对于有限体积修正效应不可忽略 [83]，并且在预言重子 sigma 项时也起到了较为重要的作用 [133]。

综上所述，可靠地描述格点 QCD 基态八重态重子质量模拟数据不仅需要选取合适的手征微扰理论形式，而且需要考虑格点数据的有限体积修正效应及连续性延拓。此外，还需认真处理激发态的影响。近期，我们利用满足所有对称性和圈图解析性质要求的 EOMS 协变重子手征微扰理论，自洽包含有限体积修正效应，考虑连续性延拓，计算基态八重态重子质量到次次次领头阶，结合最新格点量子色动力学模拟数据，系统分析了八重态重子的质量对 u 、 d 、 s 夸克质量依赖关系 [89, 90, 91, 92, 93]。本文将对以上工作进行简要地介绍。

1.4 本文框架

第二章首先介绍格点量子色动力学模拟的基本思想，格点 QCD 模拟中重子质量提取方法，以及最新格点 QCD 模拟的八重态重子质量数据。第三章主要介绍手征微扰理论。从有效场论出发，给出手征微扰理论的基本概念，手征对称性及其破缺机制。从处理介子和重子系统着手，给出计算重子质量到次次次领头阶所需要的协变拉氏量。第四章主要包含八重态重子质量的手征展开计算、格点有限体积修正、格点间距引起的离散效应的计算。第五章，利用得到的重子质量公式，拟合格点量子色动力学的八重态重子质量数据，给出相应的拟合结果和对格点数据的手征延拓、有限体积修正和连续延拓的讨论。第六章，利用 Feynman-Hellmann 定理，考虑格点计算的定标 (scale-setting) 效应以及八重态重子质量的同位旋破缺效应，精确预言重子的 sigma 项。第七章给出本文的结论和展望。

2 格点量子色动力学模拟重子质量

本章主要介绍格点量子色动力学的基本概念，给出格点计算中提取重子质量的基本公式，最后总结现有的 $N_f = 2 + 1$ 格点计算八重态重子质量的数据。

2.1 格点量子色动力学简介

格点 QCD 模拟是将 QCD 规范场论定义在离散的四维欧几里得时空中的数值计算方法。其中，格点规范场论最初由诺贝尔物理学奖获得者 Wilson 教授于 1974 年提出 [26]。格点 QCD 的基本思想是将连续时空离散化，夸克场 ψ 定义在格点上 (site)，胶子场 A_μ 定义为链接相邻格点的规范场链 (link)，从而使得非微扰问题可数值求解，最后将计算的结果延拓到连续极限。格点 QCD 是目前唯一能从第一原理出发，解决低能区非微扰量子色动力学的方法，并已经逐渐成为与高能物理实验研究和理论研究并列的第三分支。有关格点 QCD 更为详细的介绍和讨论，请读者参阅综述文献 [134, 135, 136, 137, 138, 139, 140]。

格点量子色动力学模拟作为量子色动力学的数值求解方法，其输入量与量子色动力学相同，即跑动耦合常数、夸克质量、以及描述 CP 破坏的相位。在离散时空中，格点计算还依赖于格点体积 $V = L^4$ (假设一维时间和三维空间维度的大小相同) 和格点间距 a 。

通常来说，在具体利用格点 QCD 进行计算相关物理量时需要三个步骤：一是在有限离散的四维时空中，引入紫外 (UV) 正则化因子 (regulator)，解决量子色动力学的重整化问题；二是利用路径积分和蒙特卡洛 (Monte Carlo) 数值计算方法计算格点规范场论的格林函数；三是利用不同格点间距下的结果并借助相关有效理论，去除离散误差，得到连续极限下的结果（对于裸的物理量，需要选取特定的重整化方案）。下面我们对上述步骤作简要描述。更为详细的介绍可以参考文献 [141]。

在量子色动力学框架下，对于一个给定的编时算符 \hat{O} ，其期望值可以表示为路径积分的形式

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \hat{O}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] e^{-(\psi M \psi + S_G)}, \quad (1)$$

其中 \mathcal{Z} 是欧几里得时空下的配分函数 [142, 143, 144, 145, 146]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Psi e^{-S[\Psi]} = \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-(\bar{\psi} M \psi + S_G)}. \quad (2)$$

计算路径积分需要知道所有夸克场和胶子场的组态，因此，在格点 QCD 中首先将有限时空分割成长度为 a 的规则晶胞 (我们仅讨论各向同性的情况，即时间和空间维度的格点间距均为 a)，如图 2 所示。

$$x_\mu = n_\mu a, \quad n_\mu = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

其中 a 是在方向 μ 上的格点间距， N 是在方向 μ 上的格点数目。 μ 方向上的格点盒子长度 $L = aN$ 。对于强子基态性质的计算，时间维度的格点数目 N_t 通常是空间维度 N_s 的 $3 \sim 5$ 倍。对于各向同性的格点模拟，格点间距 $a_t = a_s$ ，各向异性的通常 $a_t < a_s$ 。为了保证计算的精确性和统计量，格点间距 a 一般取为 0.1 fm，格点盒子长度 L 取为 $3 \sim 5$ fm。

在离散化的欧几里得时空中，夸克场定义在晶胞的格点上，胶子场定义为链接相邻两个格点的规范场链，

$$\psi \rightarrow \Psi(x) = (u(x), d(x), s(x), \dots)^T, \quad A_\mu \rightarrow U_\mu(x, y) = P \exp(-\int_x^y A_\mu(x') dx') \quad (4)$$

因此，路径积分 [方程 (1)] 在离散时空中可表示为

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}U_\mu \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{O}[\Psi, \bar{\Psi}, U_\mu] e^{-(\bar{\Psi} M(U) \Psi + S_G[U])}. \quad (5)$$

在离散化处理费米子运动方程时，会出现费米子加倍的问题。这是因为费米子传播子在动量空间中表示为

$$D(p) = \frac{i(1/a) \sum_\mu \gamma_\mu \sin(ap_\mu) + m}{[(1/a) \sum_\mu \sin(ap_\mu)]^2 + m^2}. \quad (6)$$

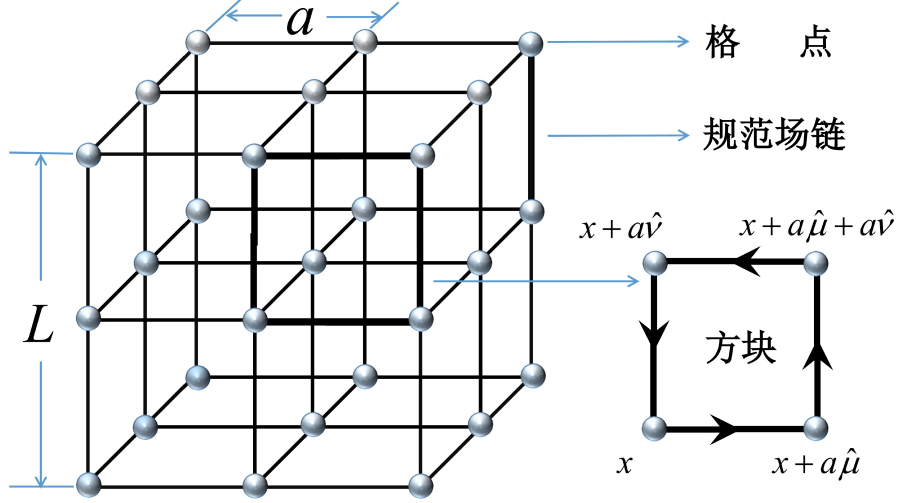


图 2: 格点量子色动力学的三维晶格结构及基本元素 (格点、规范场链、方块)。

可以看出, 除了在物理点 $p^2 = -m^2$ 存在极点外, 在边界处还存在 15 个极点。为了解决这一问题, 夸克场所满足的作用量需要做一定的修改。目前通常用的是 Staggered 费米子 [147, 148, 149]、Wilson 费米子 [150]、Twisted mass 费米子 [151, 152] 以及满足手征对称性的费米子作用量, 如 domain wall 费米子、overlap 费米子 [153, 154, 155, 156]。

作为一个数值计算方法, 格点量子色动力学存在两个自然的截断: 一个是红外截断, 即格点盒子的长度 L 要远大于系统的关联长度 $1/m_\pi$; 另一个是紫外截断, 即格点间距 a 要远大于量子色动力学能量标度 Λ_{QCD} 。若要在物理的轻夸克质量处进行相关物理量的非微扰数值计算, 以上两个固有条件就使得格点计算需要较多数量的格点, 耗费的计算资源很大。因此, 大部分格点模拟采用比物理值大的轻夸克质量。为了得到模拟物理量的真实值, 必须将格点计算结果延拓到真实的物理空间, 这就需要借助于各种有效场论, 如手征微扰理论 [157]。

研究重子谱在理解非微扰量子色动力学方面扮演着重要作用。在过去的几年中, 格点 QCD 在研究低能区域的强相互作用物理取得了很大的进步。目前, 已经有多个格点计算合作组系统计算了基态强子谱 [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]。

2.2 基态重子质量的提取方法

在规范场背景 U 下, 对给定的费米子矩阵 $M(U)$, 相应的费米子传播子 $S_U(x, y)$ 可表示为

$$S_U(x, y) = (M_U^{-1})_{y,x}, \quad (7)$$

对于已经构建好的重子观测量, 可以利用路径积分, 取遍所有组态, 计算得到其平均值。但对于未知的重子质量相关态 $|h\rangle$, 可以选择满足如下关系的插值 (interpolating) 算符 $\mathcal{O}_{i/f}$:

$$\langle 0 | \mathcal{O}_{i/f} | h \rangle \neq 0, \quad (8)$$

并计算关联函数

$$G(t, 0) = \langle 0 | \mathcal{O}_f(t) \mathcal{O}_i^\dagger(0) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{\mathcal{H}t} \mathcal{O}_f(0) e^{-\mathcal{H}t} \mathcal{O}_i^\dagger(0) | 0 \rangle. \quad (9)$$

引入完全性关系,

$$G(t, 0) = \sum_n \frac{\langle 0 | \mathcal{O}_f | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_i^\dagger | 0 \rangle}{2E_n} e^{-E_n t}, \quad (10)$$

E_n 是哈密顿量 \mathcal{H} 的第 n 个本征能量。当时间足够长之后, 基态占主要贡献, 关联函数变为

$$G(t, 0) \rightarrow \frac{\langle 0 | \mathcal{O}_f | h \rangle \langle h | \mathcal{O}_i^\dagger | 0 \rangle}{2M_h} e^{-M_h t}. \quad (11)$$

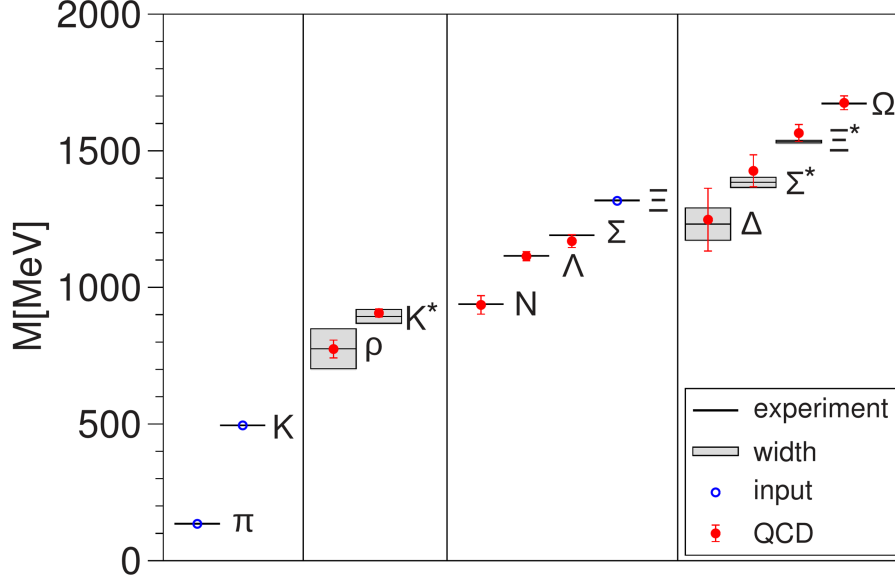


图 3: BMW 格点合作组计算的基态赝标介子八重态、矢量介子九重态、基态重子八重态、基态重子十重态质量。取自参考文献 [39]。

由于格点量子色动力学计算的物理量都是以格点间距 a 为单位，所以需要选择某个物理点处的已知物理量来确定格点间距以得到自然单位制下的物理量数值。这一过程通常称为格点的定标。一个好的定标物理量需要满足如下条件：格点计算较为容易且有较小的系统误差，最为重要的是对夸克质量依赖较弱。目前主要有两种定标方法：唯象定标方法 (phenomenological scales) 和理论定标方法 (theory scales)。其中唯象定标方法选择的定标物理量一般是在物理点处的 Ω 重子的质量 M_Ω 或赝标介子衰变常数 f_π 和 f_K 等；理论定标方法主要是指通过静态夸克势场 $V(r)$ 来确定的标度 r_0 、 r_1 和通过梯度流确定的标度 t_0 、 w_0 等 [158]。

2.3 $N_f = 2 + 1$ 格点计算的八重态重子质量

随着计算机技术的发展，完全动力学的格点量子色动力学计算成为了可能，尤其是最近几年，在计算轻强子质量谱方面取得了巨大进展。2008 年，BMW 格点合作组，采用 $N_f = 2 + 1$ (考虑 u 、 d 、 s 夸克的贡献，其中 u, d 夸克质量相同) 计算，首次系统研究了包含质子、中子在内的轻强子谱，研究成果发表在《科学》杂志上 [39]。计算中采用的 π 介子最小质量为 $M_\pi = 190$ MeV，非常接近其物理值 $M_\pi^{\text{phys.}} = 140$ MeV，以保证格点数据手征延拓的精确性；采用较大的格点盒子体积，以减少格点计算引入的有限体积修正；采用三个不同的格点间距 $a = 0.125, 0.085, 0.065$ fm，以进行格点数据的连续延拓，包含有限格点间距引入的离散效应；最后在计算中还考虑了更重的粲夸克、底夸克和顶夸克的效应。BMW 合作组获得的轻强子谱的延拓结果和实验值非常接近，偏差在 2% 以内 (具体结果见图 3)。

同一时期，PACS-CS、LHPC、HSC、QCDSF-UKQCD、NPLQCD 等格点合作组也进行了 $N_f = 2+1$ 的轻强子谱研究 [38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]。表 2 和图 4 给出了 PACS-CS [40]、LHPC [42]、HSC [43]、QCDSF-UKQCD [45] 和 NPLQCD [46] 格点合作组所采用的夸克、规范作用量，格点间距 a ，轻夸克 m_q ($\propto M_\pi^2$)、奇异夸克质量 m_s ($\propto 2M_K^2 - M_\pi^2$)，格点盒子长度 L 。从表中可以看出，目前格点计算大部分采用 $\mathcal{O}(a)$ 改善的作用量和 0.1 fm 左右的格点间距。这是因为 $\mathcal{O}(a)$ 改善的作用量，一方面可以部分恢复 Wilson 项引入后所破坏的手征对称性，另一方面可以减小由有限格点间距引入的离散效应。五个格点合作组虽然在具体计算时采用了不同的费米子和胶子作用量，但在连续极限下，所有的格点 QCD 模拟均应收敛到连续空间的量子色动力学。因此，检验不同格点合作组计算的重子质量的自洽性是非常必要的。

表 2: PACS-CS、LHPC、HSC、QCDSF-UKQCD、NPLQCD 格点计算采用的夸克、胶子作用量和格点间距 a 。

格点合作组	夸克作用量	胶子作用量	格点间距 a [fm]
PACS-CS	$\mathcal{O}(a)$ -improved Wilson	Iwasaki	0.0907(13)
LHPC	asqtad sea/domain wall valence	Symanzik-improved	0.12406(248)
HSC	anisotropic clover	Symanzik-improved	$a_t = 0.03506(23)$, $a_s = 0.1227(8)$
QCDSF-UKQCD	$\mathcal{O}(a)$ -improved Wilson	Symanzik-improved	0.0795(3)
NPLQCD	anisotropic clover	Symanzik-improved	$a_t = 0.03506(23)$, $a_s = 0.1227(8)$

在图 4 左边的 π 介子质量 (M_π) 与奇异夸克质量 ($2M_K^2 - M_\pi^2$) 的关系图中, NPLQCD 的数据只对应一个点, 这是因为 NPLQCD 主要研究在同一 π 介子质量 ($M_\pi \sim 390$ MeV) 下, 不同的格点盒子体积 $V^{(3)} = L^3$ 对重子质量的影响。从左图中可以看出, 目前这五个格点合作组采用轻夸克的质量均大于其物理值, 并且每个格点合作组对应的轻夸克质量变动范围很大, 这为手征微扰理论研究重子质量延拓提供了很好的机会。对于奇异夸克质量, PACS-CS、LHPC 所采用的奇异夸克质量大于其物理值, HSC 和 NPLQCD 采用的奇异夸克质量比其物理值小一些, QCDSF-UKQCD 采用了若干个奇异夸克质量, 并且都比其物理值小。这对研究重子质量的奇异夸克质量依赖关系, 预言重子的奇异 sigma 项非常重要。

在图 4 右边的格点盒子长度 L 与 π 介子质量 M_π^2 关系图中, 可以看出: PACS-CS 和 LHPC 采用单一的格点体积 $V^{(3)} = L^3$; HSC 和 QCDSF-UKQCD 分别采用了两个不同的格点体积; NPLQCD 为了研究格点的有限体积效应, 则采用了四个不同的格点盒子长度 $L \sim 2.0$ 、 2.5 、 3.0 、 3.9 fm。虽然当前计算技术和计算资源有了很大的发展, 但大部分的格点计算采用的 π 介子质量仍比物理值大 (最小约为 300 MeV), 格点盒子长度约为 $3 \sim 5$ fm。因此, 格点的有限体积修正不能忽略的。需要强调的是, 自洽考虑有限体积修正不仅能获得对格点数据更好的描述, 还可以更好地限制低能常数的数值。这是因为低能常数对有限体积修正和轻夸克质量依赖的贡献是不同的。

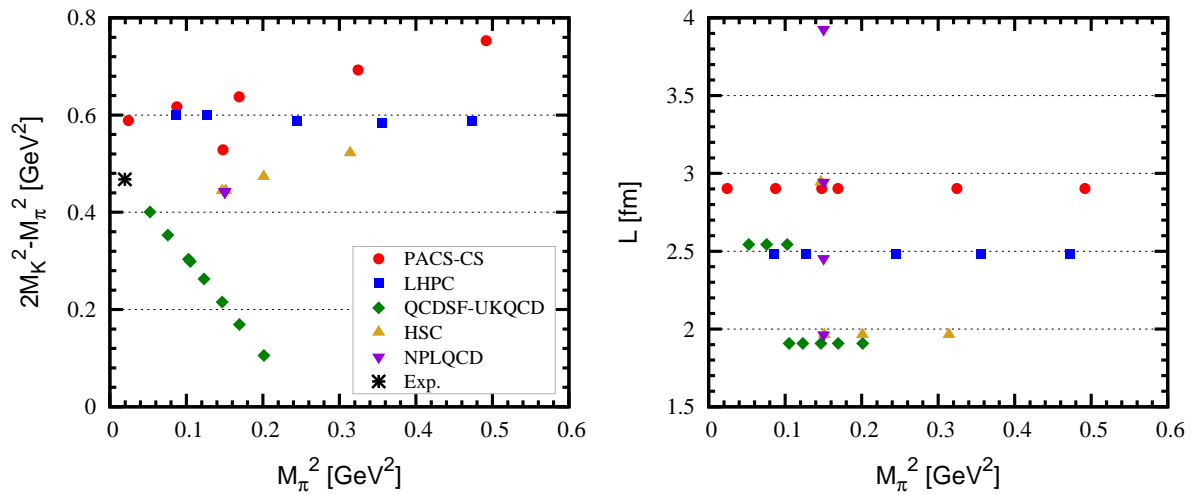


图 4: 格点合作组 PACS-CS、LHPC、QCDSF-UKQCD、HSC 和 NPLQCD 计算基态八重态重子时所采用的轻夸克质量 ($m_l \propto M_\pi^2$)、奇异夸克质量 ($m_s \propto 2M_K^2 - M_\pi^2$) 和格点盒子长度 L 。其中星号表示物理点 (夸克质量均为物理值)。取自参考文献 [89]。

3 重子手征微扰理论

如引言所述，在低能区，量子色动力学由于跑动耦合常数较大，传统的微扰论方法不再适用。为了解决这一问题，19 世纪 70 年代 Weinberg 提出了低能区量子色动力学的有效场论——手征微扰理论。本节将从有效场论出发，简单介绍手征微扰理论构建的基本原则、介子手征微扰理论和处理包含核子在内的单重子体系的重子手征微扰理论，并给出计算八重态重子质量所需要的手征有效拉氏量。

3.1 有效场论

量子色动力学是粒子物理标准模型的重要组成部分，是描述强相互作用的基本理论 [159, 160, 161, 162]。量子色动力学的基本自由度是夸克和胶子，其中夸克有六种不同的味，包括上 (u)、下 (d)、奇异 (s)、粲 (c)、底 (b)、顶 (t) 夸克，每种夸克都有自身的反夸克；每个夸克有三种颜色，对应着 $SU_c(3)$ 规范群的基本表示；胶子是强相互作用的传播子，有八种颜色，对应着 $SU_c(3)$ 群的伴随表示。

量子色动力学的规范不变拉氏量为 [163, 164]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}(x) = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_f(x) (i\not{D} - m_f) q_f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a}(x) G_a^{\mu\nu}(x), \quad (12)$$

其中 $q_f(x)$ 代表自旋为 1/2 的夸克场， $G_{\mu\nu,a}(x)$ 为胶子场的场强张量

$$G_{\mu\nu,a}(x) = \partial_\mu A_{\nu,a}(x) - \partial_\nu A_{\mu,a}(x) + g f_{abc} A_{\mu,b}(x) A_{\nu,c}(x), \quad (13)$$

这里 $A^a(x)$ 为八个独立的规范玻色子 (胶子) 场， g 为耦合常数， f_{abc} 代表了 $SU(3)$ 李群的群结构常数。

由于量子色动力学理论本身是非 Abelian 规范理论 [165]，所以量子色动力学具有渐进自由的特征 [160, 166]：在低能区，强相互作用耦合常数 $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ 远小于 1，可以利用传统的微扰方法处理问题；而在低能区，由于跑动耦合常数 α_s 大于 1，出现夸克色禁闭现象 [26]，使得传统的微扰论方法失效。因此，在处理低能区的强相互作用问题时，人们不得不借助于格点 QCD 模拟、有效场论或者唯象模型等方法。其中有效场论由于具有模型无关的特性，扮演着重要的角色。

所谓的有效场论 (Effective Field Theory, EFT) 是指更为基本的理论在量子场论框架下的低能近似：满足基本理论在低能区的所有对称性；包含低能区合适的基本自由度。虽然有效场论包含的信息不如基本理论丰富，但对处理低能区物理问题来说，更容易进行实际计算。通常来说，有效场论的行为在低能区是合适的，但其有一定能量标度 (即适用范围)，若超出能量标度，有效场论便会出现错误。有效场论在具体计算物理问题时应用范围很广，对有效场论感兴趣的读者可以参考如下综述文章 [58, 167, 168, 169, 170, 171, 172]。

接下来，我们将具体介绍构造有效场论的基本原则，与此同时，以手征微扰理论为例，将其基本概念和构建原则一一列出，以使读者更好地理解有效场论。

诺贝尔物理学奖获得者 Weinberg 教授，作为有效理论奠基人之一，在其原创性文章 [50] 中首次完整地给出有效场论基本构造原则：“If one writes down the most general possible Lagrangian, including all terms consistent with assumed symmetry principles, and then calculates matrix elements with this Lagrangian to any given order of perturbation theory, the result will simply be the most general possible S-matrix consistent with analyticity, perturbative unitarity, cluster decomposition, and the assumed symmetry principles.” 下面将上述有效场论定理展开表述。

通常构造一个完整的有效场论有以下三个重要步骤：

1. 在感兴趣的能量范围内，确认基本粒子自由度，找到合适的软能标 (soft energy scale) 和硬能标 (hard energy scale)。软能标是有效场论中的能够微扰展开的物理量，通常用字母 Q 表示；硬能标是能量分离标度 (separation of energy scale)，通常用 Λ 表示。其中软能标远远小于硬能标，这样计算的物理量就可以通过 Q/Λ 进行微扰展开。

手征微扰理论，作为低能区量子色动力学的有效场论，基本自由度不再是夸克和胶子，而是可观测的、无色的渐进自由态——强子。也就是说，在手征微扰理论中，强子被视为点粒子，没有内部结构，夸克和胶子自由度被冻结。在 u 、 d 、 s 三味空间中，软能标定义为轻夸克的质量 $m_{u,d,s}$ (具体计算时，通常把轻夸克质量与赝标介子质量联系起来) 和赝标介子的小动量 p 。硬能标是手征对称性的破缺能标 $\Lambda_{\text{ChPT}} = 4\pi F_\pi \sim 1 \text{ GeV}$ ，或者通过一些典型的强子质量来确定，如 ρ 介子的质量 770 MeV 也可视为硬能标。

2. 分析低能区的基本理论所具有的对称性和对称性的破缺机制，构建普适的、满足所有对称性及其破缺的、包含基本自由度的相互作用有效拉氏量。下面以手征微扰理论为例具体阐述这一步骤。在研究低能区物理现象时，量子色动力学所具有的手征对称性及其自发破缺起着主导作用。因此，手征微扰理论所构建的有效拉氏量需要满足手征对称性及其显式/自发破缺。按此规则可构造出无穷多项的手征有效拉氏量，并伴随着无穷多个低能常数。这些低能常数原则上可以由量子色动力学给出，但由于其非微扰特性，实际上并不能直接计算得到。为了确定低能常数的数值，需要借助于格点量子色动力学模拟数据或者相关物理量实验数值。当然，手征微扰理论中的有效拉氏量还需要满足厄米性、洛仑兹协变性、宇称共轭、电荷共轭不变性等对称性。

3. 需要确定一套有效的计阶规则来系统组织上步中得到的无穷多项的有效拉氏量，估算相关费曼图对所计算物理量矩阵元的贡献。计阶规则非常重要，它决定着实际计算所需的阶数和计算精度。在一定的阶数下，有效场论只包含有限项的有效拉氏量和相应的有限数目的费曼图。在传统意义上来说，有效理论是一个非可重整理论。但是在特定的展开阶数下，考虑所有满足对称性的相互作用拉氏量，有效理论可以通过重新定义拉氏量中的粒子场和低能常数进行重整化。

对手征微扰理论来说，有效拉氏量和相应费曼图贡献都以 $(p(M_\phi)/\Lambda_{\text{ChPT}})^{n_{\text{ChPT}}}$ 进行展开，这里的 n_{ChPT} 就是展开的阶数，也称为手征阶数 (chiral order)， p 是小动量， M_ϕ 是赝标介子的质量， Λ_{ChPT} 是手征对称性破缺能标。

在单重子系统， L 圈费曼图的手征阶数为

$$n_{\text{ChPT}} = 4L - 2N_\phi - N_B + \sum_k kV_k, \quad (14)$$

这就是所谓的计阶规则。其中 N_ϕ 和 N_B 分别指介子和重子的内线传播子的数目， V_k 代表了 k 阶拉氏量提供的相互作用顶点数目。

利用以上三个步骤，就可以系统地构建所关注能区的有效场论，进而研究相关物理过程。在手征微扰理论中，最为关键的是理论本身所具有的手征对称性和对称性的自发及显式破缺。下一小节，我们将着重讨论这一问题。对手征微扰理论感兴趣的读者可以参考综述文章 [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]。

3.2 手征对称性及其破缺

构建手征有效拉氏量时，不仅需要满足洛仑兹不变性、 $\text{SU}(3)_C$ 规范不变性、宇称变换不变性、电荷共轭不变性、时间反演不变性，还要满足最为重要的手征变换不变性。手征对称性作为一个全局、连续的对称性，在低能区的强相互作用中扮演了重要的角色，也是手征微扰理论有效性的重要保障。接下来，我们从量子色动力学的拉氏量出发来阐述这一重要的对称性。

量子色动力学中的六种夸克通常可分为三个轻夸克 (u 、 d 、 s) 和三个重夸克 (c 、 b 、 t)，他们的质量满足如下关系

$$m_u, m_d, m_s \ll 1 \text{ GeV} \ll m_c, m_b, m_t. \quad (15)$$

因此，在能量和动量低于 1 GeV 时，重夸克的传播可以等效地看作是静态的，来自重夸克的贡献可以被积分掉，当作接触项来考虑。也就是说，低能区量子色动力学的有效基本自由度是 u 、 d 、 s 三种轻夸

克。由于轻夸克质量比典型的强子能标小很多，因此在手征极限 ($m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$) 下，低能区量子色动力学的拉氏量可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f i \not{D} q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu}. \quad (16)$$

利用手性矩阵 γ_5 定义如下左手和右手投影算符

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5). \quad (17)$$

将夸克场进行投影，得到其左手成分 $q_{f,L} = P_L q_f$ 和右手成分 $q_{f,R} = P_R q_f$ 。此时可将量子色动力学的拉氏量改写为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{f,R} i \not{D} q_{f,R} + \bar{q}_{f,L} i \not{D} q_{f,L} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu}, \quad (18)$$

从而无质量的夸克场的左手成分和右手成分完全分开。由于协变微商 $\partial_\mu D$ 是味独立的，因此手征极限下的量子色动力学拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ 具有全局的 $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ 对称性。根据 Nöther 定理 (对每一种连续对称性存在相应的守恒量) [173, 174]，上述对称性意味着存在 $2 \times (8 + 1) = 18$ 个守恒流，分为左手流和右手流：

$$\begin{aligned} L^{\mu,a} &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_L, & R^{\mu,a} &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_R, \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, & R^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R. \end{aligned} \quad (19)$$

通常将上述左手和右手守恒流进行线性组合，定义新的守恒流-矢量流和轴矢流

$$\begin{aligned} V^{\mu,a} &= R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \\ A^{\mu,a} &= R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q, \\ V^\mu &= R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, \\ A^\mu &= R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \end{aligned} \quad (20)$$

上述左手和右手守恒流，矢量流和轴矢流都满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 。

但实际上，轻夸克质量并不为零。包括夸克质量后，格点量子色动力学的拉氏量可表示为，

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_M, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q} \mathcal{M} q = -(\bar{q}_R \mathcal{M} q_L + \bar{q}_L \mathcal{M} q_R), \quad (22)$$

其中 \mathcal{M} 为夸克质量矩阵

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (23)$$

其中 $m_l = m_u = m_d$, m_s 分别是轻夸克、奇异夸克的质量。可以看到包含了质量项之后，夸克场的左手部分和右手部分出现混合，手征对称性 $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ 显式破缺。在这种情况下，只有矢量流是守恒的，也就是重子数是守恒的。在量子色动力学确立之前，这方面的讨论已经存在 [175, 176]。各种形式的对称性破缺模式在文献 [177] 中有详细的讨论。

除了手征对称性的显式破缺外，还存在手征对称性的自发破缺，即从 $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ 破缺到 $\text{SU}(3)_V$ 。两个重要的实验现象表明手征对称性确实存在自发破缺：1) 低能区强子谱中不存在宇称双带；2) 赝标介子 (特别是 π 介子) 的质量与其它强子态质量相比很小。

3.3 介子手征微扰理论

手征微扰理论作为低能量子色动力学的有效场论，最初由 Weinberg 在 1979 年提出 [50]。文章清晰地阐述了如何系统地构建手征有效拉氏量并计算了领头阶圈图修正。随后 Gasser 和 Leutwyler 将手征微扰理论应用到处理介子问题，并在 SU(2) [51] 和 SU(3) [52] 系统取得了较大的成功。随着实验技术的提高、格点量子色动力学的发展，介子手征微扰理论在计算介子质量，形状因子等方面获得了广泛的应用。近期的研究成果可以参看综述文章 [62, 178]。

在介子手征微扰理论中，按照 Weinberg 计阶规则，描述 Goldstone 玻色子相互作用的最为普遍的手征有效拉氏量可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\phi}^{(2)} + \mathcal{L}_{\phi}^{(4)} + \mathcal{L}_{\phi}^{(6)} + \cdots, \quad (24)$$

上标 (i) , $i = 2, 4, 6, \dots$ 代表动量和夸克质量的展开阶数，对应手征阶数 $\mathcal{O}(p^i)$ ，例如指标 2 表示有两个对介子场的偏导或者含有一个夸克质量项。标量场 $\phi = (\pi, K, \eta)$ 代表赝标介子八重态。由于本文主要介绍手征微扰理论对重子质量的研究，因此这里只列出与重子质量计算相关的拉氏量的具体形式，更为完整和更高阶的拉氏量可以参看综述文章 [61] 及其参考文献。

最低阶的介子拉氏量：

$$\mathcal{L}_{\phi}^{(2)} = \frac{F_{\phi}^2}{4} \langle D_{\mu} U (D^{\mu} U)^{\dagger} \rangle + \frac{F_{\phi}^2}{4} \langle \chi U^{\dagger} + U \chi^{\dagger} \rangle, \quad (25)$$

其中 F_{ϕ} 为手征极限下赝标介子的衰变常数， $\langle \cdots \rangle$ 代表味空间矩阵求迹， $\chi = 2B_0 \mathcal{M}$ 代表显式的手征破缺，其中 $B_0 = -\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle / F_{\phi}^2$ 。在同位旋对称性下 $m_u = m_d = m_l$ ，夸克质量矩阵写为 $\mathcal{M} = \text{diag}(m_l, m_l, m_s)$ 。3 × 3 幺正矩阵 U 包含了八重态赝标介子的标量场

$$U(\phi) = u^2(\phi) = \exp \left(i \frac{\phi}{F_{\phi}} \right), \quad (26)$$

$$\phi = \sum_{a=1}^8 \phi_a \lambda_a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta \end{pmatrix}. \quad (27)$$

在 $\mathcal{O}(p^4)$ 情况下，完整的介子拉氏量为 [52]：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi}^{(4)} = & L_1 [\langle D_{\mu} U (D^{\mu} U)^{\dagger} \rangle]^2 + L_2 \langle D_{\mu} U (D_{\nu} U)^{\dagger} \rangle \langle D^{\mu} U (D^{\nu} U)^{\dagger} \rangle \\ & + L_3 \langle D_{\mu} U (D^{\mu} U)^{\dagger} D_{\nu} D (D^{\nu} U)^{\dagger} \rangle + L_4 \langle D_{\mu} U (D^{\mu} U)^{\dagger} \rangle \langle \chi U^{\dagger} + U \chi^{\dagger} \rangle \\ & + L_5 \langle D_{\mu} U (D^{\mu} U)^{\dagger} (\chi U^{\dagger} + U \chi^{\dagger}) \rangle + L_6 [\langle \chi U^{\dagger} + U \chi^{\dagger} \rangle]^2 \\ & + L_7 [\langle \chi U^{\dagger} - U \chi^{\dagger} \rangle]^2 + L_8 \langle U \chi^{\dagger} U \chi^{\dagger} + \chi U^{\dagger} \chi U^{\dagger} \rangle \\ & - i L_9 \langle f_{\mu\nu}^R D^{\mu} U (D^{\nu} U)^{\dagger} + f_{\mu\nu}^L (D^{\mu} U)^{\dagger} D^{\nu} U \rangle + L_{10} \langle U f_{\mu\nu}^L U^{\dagger} f_R^{\mu\nu} \rangle \\ & + H_1 \langle f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu} \rangle + H_2 \langle \chi \chi^{\dagger} \rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$f_R^{\mu\nu} = \partial^{\mu} r^{\nu} - \partial^{\nu} r^{\mu} - i[r^{\mu}, r^{\nu}], \quad f_L^{\mu\nu} = \partial^{\mu} l^{\nu} - \partial^{\nu} l^{\mu} - i[l^{\mu}, l^{\nu}]. \quad (29)$$

这里的 $r_{\mu} = v_{\mu} + a_{\mu}$, $l_{\mu} = v_{\mu} - a_{\mu}$, v_{μ} 、 a_{μ} 分别是外部的矢量和轴矢流。 L_i ($i = 1, \dots, 10$) 为低能常数。

3.4 重子手征微扰理论

手征微扰理论在介子系统取得巨大成功后，Gasser, Sainio 和 Svarc 首次将手征微扰理论系统地应用到处理单核子系统 [53]。但研究发现，由于核子质量接近手征截断能标 Λ_{ChPT} ，并且在手征极

限下核子质量不为零，这就导致介子系统中的 Weinberg 计阶规则在单重子系统不再适用。具体来说，在计算手征阶数为 n 的圈图时，利用维数正规化方法和修改的最小减去规则 (modified minimal subtraction, $\overline{\text{MS}}$) 重整化圈图时，会得到低于 n 阶贡献的解析项，也就是所谓的计阶规则破坏项 (power-counting-breaking (PCB) terms)。为了恢复系统的计阶规则，Jekins 和 Manohar 提出了重重子手征微扰理论 (Heavy-baryon ChPT) [63]。其主要思想借用了重夸克有效理论 [179]，即将重子场当做静态场，将重子质量近似为无穷大，计算结果按照小量 p/Λ_{ChPT} 和 p/m_B 同时进行展开。由于其计算的简便性，重重子手征微扰理论一经提出就得到了广泛的应用，尤其在 u 和 d 两味空间。但同时，其缺点和局限性也逐渐被意识到：如重重子手征微扰理论的拉氏量需要满足再参量化不变性 (reparameterisation invariance) [180] 和洛伦兹不变性 [181]。因此在相同手征阶数下，重重子手征有效拉氏量要比协变形式的手征拉氏量包含更多的项⁴，并且圈图的解析性质也遭到了破坏，即使是对于最简单的波函数重整化也是如此 [182]。此外，在处理部分低能区问题时，例如 π - N 散射 [183]、核子的电磁形状因子 [184]，收敛速度较慢。这是因为在重子质量无穷大的极限下费曼振幅的解析结构遭到破坏。

目前，相对论框架下的手征微扰理论主要有两种形式⁵：红外手征微扰理论 (Infrared ChPT) [64] 和 Extended-on-mass-shell (EOMS) 手征微扰理论 [65, 66]。其中红外手征微扰理论的主要思想是意识到圈图结果可以分为两部分：一部分是不破坏计阶规则的红外奇异部分 (infrared singular part)，另一部分是含有动量 p 、夸克质量 m_q 的多项式，称为正规部分 (regular part)。正规部分不仅包含解析的高阶修正项，还含有破坏计阶规则的解析项。为了使计算结果恢复系统的计阶规则，红外手征微扰理论直接将正规部分扣除掉。显而易见，红外手征微扰理论虽然恢复了系统的计阶规则，但也丢掉了原本有贡献的高阶修正项。这就造成了红外方法的微扰展开收敛速度较慢。进一步研究还发现：保留的红外奇异部分在能量标度为两倍的重子质量时也不是解析的。在最初应用红外手征微扰理论计算相关物理量时，人们认为上述问题并不会造成较大的影响。但在随后的研究中发现，上述问题的影响不可忽略，例如核子磁矩的夸克质量依赖 [187] 和八重态重子磁矩的 SU(3) 破缺 [188]。随后发展的 EOMS 方法则避免了上述问题。

EOMS 方法的主要思想是：首先按照标准的维数正规化 (dimensional regularization) 方法 $\overline{\text{MS}}$ 或 MS 计算圈图函数；然后将圈图函数中破坏计阶规则的解析项分离出来并移除掉。圈图积分之后可能含有的破坏计阶规则的项总是解析的，总可以通过重新定义低能常数来移除，因此 EOMS 方法总是可行的。对于一个实际的计算过程，系统的计阶规则可以通过两种方法得以恢复：1，首先计算得到圈图的解析函数，然后通过相应的微扰展开得到破坏计阶规则的项并移除；2，先将费曼积分前的被积函数做微扰展开，然后进行费曼积分，显式地计算出破坏计阶规则的项并减除。因为圈图函数并不总是可以解析求解的，因此第一种方法有时会失效。但第二种处理方法总是有效的，因为破坏计阶规则的项总是有限的、解析的。EOMS 方法不仅保持了圈图的解析性质和所有的对称性，而且在计算磁矩、质量等静态性质中表现出较好的收敛性质 [82, 188, 189, 190]。重重子手征微扰理论的更多应用可以参看综述文章 [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 191]。

在重重子手征微扰理论中，描述介子-重子相互作用最为普遍的有效拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_{\phi B}^{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(2)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(3)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(4)} + \cdots, \quad (30)$$

其中上标 (i) 对应手征阶数 $\mathcal{O}(p^i)$ ，标量场 $\phi = (\pi, K, \eta)$ 代表八重态赝标介子，旋量场 $B = (N, \Lambda, \Sigma, \Xi)$ 代表基态的八重态重子。由于本文主要讨论重子质量的计算，所以这里只列出与重子质量相关的拉氏量。

最低阶的介子-重子相互作用拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} = \langle \bar{B}(i\not{D} - m_0)B \rangle + \frac{D/F}{2} \langle \bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[u_\mu, B]_\pm \rangle, \quad (31)$$

⁴例如在计算八重态重子的质量时，在重重子手征微扰理论框架下， $\mathcal{O}(p^2)$ 拉氏量中含有很多的相对论修正项，即具有确定系数的 $1/m_0$ 修正项，其中 m_0 为手征极限下重子质量 [76]。

⁵早期的一些其它尝试可以参看文献 [72, 185, 186]。

其中 m_0 代表手征极限下八重态重子的质量, D 、 F 是轴矢耦合常数, 可以通过重子的半轻子衰变确定。八重态重子场整合在无迹的 3×3 矩阵 B 中:

$$B = \sum_{a=1}^8 \frac{B_a \lambda_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}. \quad (32)$$

公式 (31) 中对重子场的协变微商为

$$D_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B], \quad (33)$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \{u^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) + u (\partial_\mu - il_\mu) u^\dagger\}, \quad (34)$$

其中轴矢流 u_μ 定义为

$$u_\mu = i \{u^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) u - u (\partial_\mu - il_\mu) u^\dagger\}, \quad (35)$$

这里的 $u = \sqrt{U}$ 。

在 $\mathcal{O}(p^2)$ 阶, 描写八重态介子-八重态重子相互作用的有效拉氏量为 (更为完整的形式可参考文献 [192])

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi B}^{(2)} = & b_0 \langle \chi_+ \rangle \langle \bar{B} B \rangle + b_{D/F} \langle \bar{B} [\chi_+, B]_{\pm} \rangle \\ & + b_1 \langle \bar{B} [u_\mu, [u^\mu, B]] \rangle + b_2 \langle \bar{B} \{u_\mu, \{u^\mu, B\}\} \rangle \\ & + b_3 \langle \bar{B} \{u_\mu, [u^\mu, B]\} \rangle + b_4 \langle \bar{B} B \rangle \langle u^\mu u_\mu \rangle \\ & + ib_5 \left(\langle \bar{B} [u^\mu, [u^\nu, \gamma_\mu D_\nu B]] \rangle - \langle \bar{B} \overleftarrow{D}_\nu [u^\nu, [u^\mu, \gamma_\mu B]] \rangle \right) \\ & + ib_6 \left(\langle \bar{B} [u^\mu, \{u^\nu, \gamma_\mu D_\nu B\}] \rangle - \langle \bar{B} \overleftarrow{D}_\nu \{u^\nu, [u^\mu, \gamma_\mu B]\} \rangle \right) \\ & + ib_7 \left(\langle \bar{B} \{u^\mu, \{u^\nu, \gamma_\mu D_\nu B\}\} \rangle - \langle \bar{B} \overleftarrow{D}_\nu \{u^\nu, \{u^\mu, \gamma_\mu B\}\} \rangle \right) \\ & + ib_8 \left(\langle \bar{B} \gamma_\mu D_\nu B \rangle - \langle \bar{B} \overleftarrow{D}_\nu \gamma_\mu B \rangle \right) \langle u^\mu u^\nu \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

其中公式中的第一行代表手征对称性破缺项, $\chi_+ = u^\dagger \chi u^\dagger + u \chi^\dagger u$ 。 b_0, b_D, b_F, b_i ($i = 1, \dots, 8$) 是低能常数。

三阶的手征拉氏量对重子质量没有贡献。四阶的相互作用拉氏量可以写为 [76]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi B}^{(4)} = & d_1 \langle \bar{B} [\chi_+, [\chi_+, B]] \rangle + d_2 \langle \bar{B} [\chi_+, \{\chi_+, B\}] \rangle \\ & + d_3 \langle \bar{B} \{\chi_+, \{\chi_+, B\}\} \rangle + d_4 \langle \bar{B} \chi_+ \rangle \langle \chi_+ B \rangle \\ & + d_5 \langle \bar{B} [\chi_+, B] \rangle \langle \chi_+ \rangle + d_7 \langle \bar{B} B \rangle \langle \chi_+ \rangle^2 \\ & + d_8 \langle \bar{B} B \rangle \langle \chi_+^2 \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

以上给出的拉氏量只是描述八重态介子和八重态重子的相互作用。如引言所述, 在重子手征微扰理论中, 需要特别注意十重态重子的贡献。因此, 下面给出与八重态重子质量计算相关的、包含十重态重子贡献的有效拉氏量。

重子十重态为 $SU(3)$ 味空间中自旋 $3/2$ 的多重态, 通常用 Rarita-Schwinger 场 $T^{abc} \equiv T_\mu^{abc}$ 来标记, 其中 T_μ^{abc} 每一个矩阵元是一个四分量的 Dirac 旋量。具体代表的粒子为 $T^{111} = \Delta^{++}$, $T^{112} = \Delta^+/\sqrt{3}$, $T^{122} = \Delta^0/\sqrt{3}$, $T^{222} = \Delta^-$, $T^{113} = \Sigma^{*+}/\sqrt{3}$, $T^{123} = \Sigma^{*0}/\sqrt{6}$, $T^{223} = \Sigma^{*-}/\sqrt{3}$, $T^{133} = \Xi^{*0}/\sqrt{3}$, $T^{233} = \Xi^{*-}/\sqrt{3}$, $T^{333} = \Omega^-$ 。

重子十重态的自由拉氏量可写为

$$\mathcal{L}_T = \bar{T}_\mu^{abc} (i\gamma^{\mu\nu\alpha} D_\alpha - m_D \gamma^{\mu\nu}) T_\nu^{abc}, \quad (38)$$

其中 m_D 是手征极限下重子十重态的质量, 协变微商定义为 $D_\nu T_\mu^{abc} = \partial_\nu T_\mu^{abc} + (\Gamma_\nu, T_\mu)^{abc}$, Γ_ν 被称为手征链接 (chiral connection) [61], $(X, T_\mu)^{abc} \equiv (X)_d^a T_\mu^{dbc} + (X)_d^b T_\mu^{adc} + (X)_d^c T_\mu^{abd}$ 。在此后的拉氏量中,

我们均采用爱因斯坦求和规则，即将重复的 SU(3) 指标 (拉丁字母 a, b, c, \dots 标记) 进行求和。 $(X)_b^a$ 代表矩阵 X 的 a 行 b 列的矩阵元。全反对称矩阵定义为： $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $\gamma^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2} \{\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\} = -i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta\gamma_5$, 其中度规张量为 $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\epsilon_{0,1,2,3} = -\epsilon^{0,1,2,3} = 1$, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

领头阶的十重态重子和赭标介子相互作用的拉氏量为

$$\mathcal{L}_T^{(2)} = \frac{t_0}{2} \bar{T}_\mu^{abc} g^{\mu\nu} T_\nu^{abc} \langle \chi_+ \rangle + \frac{t_D}{2} \bar{T}_\mu^{abc} g^{\mu\nu} (\chi_+, T_\nu)^{abc}, \quad (39)$$

其中参数 t_0, t_D 为两个未知的低能常数。

描述八、十重态重子与赭标介子相互作用的最低阶手征有效拉氏量为 [132]

$$\mathcal{L}_{\phi BT}^{(1)} = \frac{i\mathcal{C}}{m_D F_\phi} \epsilon^{abc} (\partial_\alpha \bar{T}_\mu^{ade}) \gamma^{\alpha\mu\nu} B_c^e \partial_\nu \phi_b^d + \text{H.c.}, \quad (40)$$

其中, ϕ 和 B 分别代表介子、八重态重子的场, \mathcal{C} 是 ϕBT 耦合常数。这里采用 Pascalutsa 等人提出的赭标介子, 八、十重态重子自洽耦合机制 [193, 194]。最后给出 D 维时空中的自旋为 3/2 粒子的传播子形式 [195]

$$S^{\mu\nu}(p) = -\frac{\not{p} + m_D}{p^2 - m_D^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - \frac{1}{d-1} \gamma^\mu \gamma^\nu - \frac{1}{(d-1)m_D} (\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) - \frac{d-2}{(d-1)m_D^2} p^\mu p^\nu \right]. \quad (41)$$

利用以上给出的赭标介子八重态、重子八重态以及重子十重态相互作用的有效拉氏量, 在 EOMS 重子手征微扰理论的框架下, 可以计算重子八重态的质量到次次次领头阶。

4 次次次领头阶的八重态重子质量

上一章给出了手征微扰理论中的有效相互作用拉氏量，下面利用量子场论的标准步骤计算八重态重子的自能修正，给出其质量的表达式。理论公式中含有的未知低能常数需要拟合格点 QCD 重子质量数据确定。为了描述格点模拟数据，需要在手征微扰理论框架下考虑格点 QCD 的有限体积修正和有限格点间距的离散效应。

4.1 八重态重子质量公式

利用重子手征微扰理论，仅考虑虚的八重态重子，计算八重态重子质量到 $\mathcal{O}(p^4)$ 所需要用到的拉氏量为：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\phi}^{(2)} + \mathcal{L}_{\phi}^{(4)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(2)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(3)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(4)}, \quad (42)$$

其中介子部分和介子-重子相互作用部分的拉氏量在上一章中已经给出。相对应需要计算的费曼图见图 5。

手征展开到次次次领头阶的八重态重子质量表达式为

$$m_B = m_0 + m_B^{(2)} + m_B^{(3)} + m_B^{(4)}, \quad (43)$$

其中 m_0 是手征极限重子质量，领头阶的自能贡献 $\Sigma_a = m_B^{(2)}$ ，可用树图表示 [图 5(a)]，次领头阶自能的贡献 $\Sigma_b = m_B^{(3)}$ ，即圈图 [图 5(b)]，次次领头阶自能的贡献 $m_B^{(4)} = \Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_e$ 可以分为三个部分：四阶树图 [图 5(c)]、蝌蚪图 [图 5(d)] 和圈图 [图 5(e)]。EOMS 协变手征微扰理论中八重态重子质量的具体表达式可以参考文献 [89]。受宇称守恒的限制，重子质量没有 $\mathcal{O}(p^1)$ 阶的贡献。

为了研究虚的十重态重子对八重态重子质量的影响，需要显式地包含十重态重子的贡献。此时，八重态重子的质量公式可以表达为

$$m_B = m_0 + m_B^{(2)} + m_B^{(3)} + m_B^{(4)} + m_B^{(D)}, \quad (44)$$

其中 $m_B^{(D)}$ 代表了虚的十重态重子的贡献。利用上一章节给出的赝标介子与八重态重子、十重态重子相互作用的拉氏量，计算相应的费曼图 6，可以得到虚的十重态重子对八重态重子质量的贡献 [90]。

在次次次领头阶，将出现在 $m_B^{(2)}$ 中的 $\mathcal{O}(p^2)$ 介子质量替换为 $\mathcal{O}(p^4)$ 介子质量， $m_B^{(2)}$ 就会产生次次次领头阶的贡献。相应的赝标介子八重态在同位旋极限下， $\mathcal{O}(p^4)$ 的表达式为 [52]

$$\begin{aligned} M_{\pi,4}^2 = & M_{\pi,2}^2 \left\{ 1 + \frac{M_{\pi,2}^2}{32\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2} \right) - \frac{M_{\eta,2}^2}{96\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{16}{F_\phi^2} \left[\left(\frac{M_{\pi,2}^2}{2} + M_{K,2}^2 \right) (2L_6^r - L_4^r) + \frac{M_{\pi,2}^2}{2} (2L_8^r - L_5^r) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} M_{K,4}^2 = & M_{K,2}^2 \left\{ 1 + \frac{M_{\eta,2}^2}{48\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{16}{F_\phi^2} \left[\left(\frac{M_{\pi,2}^2}{2} + M_{K,2}^2 \right) (2L_6^r - L_4^r) + \frac{M_{K,2}^2}{2} (2L_8^r - L_5^r) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

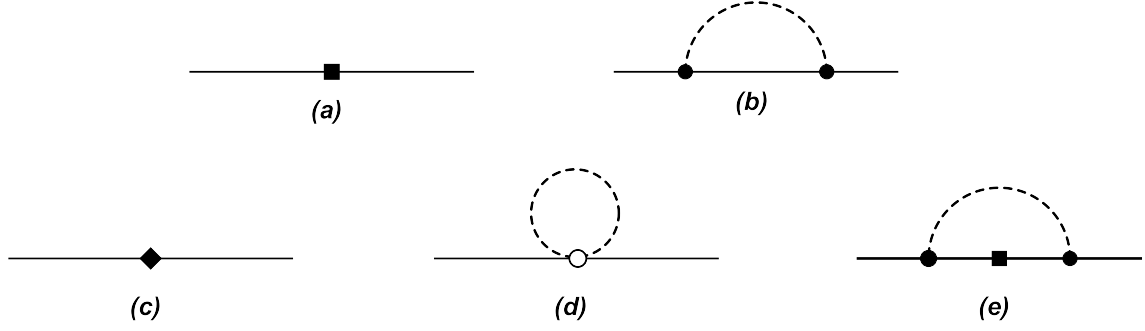


图 5: 利用 EOMS 重子手征微扰理论计算八重态重子质量到 $\mathcal{O}(p^4)$ 阶需要计算的费曼图。实线对应八重态重子场，虚线对应于八重态赝标介子场。实心方块 (实心菱形) 是二阶 (四阶) 的相互作用顶点；实心圆圈 (空心圆圈) 代表来自一阶 (二阶) 有效拉氏量的相互作用顶点。波函数重整化的费曼图并没有显式给出，但计算中包含了它们的贡献。

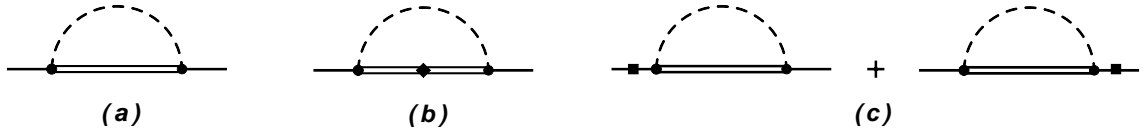


图 6: 虚的十重态重子对八重态重子质量的贡献。双实线对应十重态重子场，其它符号的意义同图 5。

$$\begin{aligned}
M_{\eta,4}^2 = & M_{\pi,2}^2 \left[\frac{M_{\eta,2}^2}{96\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2} \right) - \frac{M_{\pi,2}^2}{32\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2} \right) + \frac{M_{K,2}^2}{48\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{K,2}^2}{\mu^2} \right) \right] \\
& + M_{\eta,2}^2 \left[1 + \frac{M_{K,2}^2}{16\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{K,2}^2}{\mu^2} \right) - \frac{M_{\eta,2}^2}{24\pi^2 F_\phi^2} \ln \left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2} \right) \right] \\
& + \frac{16}{F_\phi^2} \left(\frac{M_{\pi,2}^2}{2} + M_{K,2}^2 \right) (2L_6^r - L_4^r) + 8 \frac{M_{\eta,2}^2}{F_\phi^2} (2L_8^r - L_5^r) \\
& + \frac{128}{9} \frac{(M_{K,2}^2 - M_{\pi,2}^2)^2}{F_\phi^2} (3L_7^r + L_8^r),
\end{aligned} \tag{47}$$

其中公式中出现的低能常数的经验值为 $2L_6^r - L_4^r = -0.17 \times 10^{-3}$, $2L_8^r - L_5^r = -0.22 \times 10^{-3}$, 和 $3L_7^r + L_8^r = -0.15 \times 10^{-3}$ (取自最新的全局拟合研究 [196])。以上数值对应的重整化能标 $\mu = 0.77 \text{ GeV}$ ⁶。为了使重子质量计算中的重整化能标保持一致，我们在 $\mu = 1 \text{ GeV}$ 时，重新计算了低能常数 L_i^r 的数值。

4.2 有限体积修正效应

这一小节主要介绍研究格点 QCD 数据时需要考虑的有限体积修正。由于格点 QCD 模拟是在一个有限的四维超级盒子中进行的，因此格点计算的结果和无限大时空中的结果是不同的，这种差别被称为有限体积修正。有限体积修正的物理起因很容易理解：在有限大时空中，周期性边界条件使得虚粒子的动量离散化。在对动量积分时，应该将连续积分替换成有限求和，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \rightarrow \sum_{n=-N+1}^{+N} \left(\frac{2\pi}{L} \right) n, \tag{48}$$

⁶需要强调的是低能参数 L_i^r 的不确定度很大，但因为它们的贡献对最后结果的影响非常小，因此在拟合格点 QCD 数据可以不予考虑。

其中 $N = L/(2a)$, a 为相应的格点间距。对于零温的格点 QCD, 超级盒子的时间尺度比空间尺度大一些, 通常约为 $3 \sim 5$ 倍。相比较而言, 计算格点有限体积修正时, 可假设连续的四维时空积分中的时间维度积分还是从 $-\infty$ 到 ∞ 的连续积分, 而空间维度的连续积分需要替换成无穷求和。需要指出的是, 由于虚粒子只存在于圈图的计算中, 因而只有圈图的结果受到有限时空边界的影响。

下面以三阶圈图 5(b) 为例, 具体阐述计算格点有限体积修正的步骤。按照有限体积修正的定义, 圈图 5(b) 的有限体积修正可表示为

$$\delta G_N = G_N(L) - G_N(\infty), \quad (49)$$

$G_N(L)$ 和 $G_N(\infty)$ 分别代表有限盒子和连续时空中的圈图积分, 其中

$$G_N(\infty) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{k} - \not{p} + m_0)\not{k}}{(k^2 - M_\phi^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon)}. \quad (50)$$

接下来, 利用文献 [197] 给出的计算有限体积修正的 master 公式, 可直接计算 δG_N 。该方法具有如下几个优点: 首先由于 $G_N(L)$ 和 $G_N(\infty)$ 具有相同的紫外发散行为, 因此两者相减得到的 δG_N 是有限的, 可以在四维时空中计算; 其次作为短程物理, 圈图计算中所含有的破坏计阶规则的项, 在 $G_N(L)$ 和 $G_N(\infty)$ 中相同, 所以有限体积修正 δG_N 中不存在破坏计阶规则的项。

首先利用费曼参数化方法, 将公式 (50) 改写为

$$G_N(\infty) = i \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{k} - \not{p} + M_0)\not{k}}{((k - px)^2 - \mathcal{M}_N^2)^2} = i \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(k^2 - 2k \cdot p) + 2k^2 M_0}{((k - px)^2 - \mathcal{M}_N^2)^2}, \quad (51)$$

其中 $\mathcal{M}_N^2 = x^2 M_0^2 + (1-x)m_M^2 - i\epsilon$ 。如前所述, 在计算零温度下格点 QCD 的有限体积修正时, 需要区别对待公式 (51) 中的时间维度和三维空间维度的积分。在重子的静止坐标系中, $p^\mu = (M_0, \vec{0})$, 公式 (51) 变为

$$G_N(\infty) = i \int_0^1 dx \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k})(k_0^2 - \vec{k}^2 - 2k_0 M_0) + 2(k_0^2 - \vec{k}^2)M_0}{((k_0 - xM_0)^2 - \vec{k}^2 - \mathcal{M}_N^2)^2}. \quad (52)$$

为计算上述积分, 首先进行动量移动 $k_0 (k_0 \rightarrow k'_0 + xM_0)$, 然后进行 Wick 转动 $k'_0 (k'_0 \rightarrow ik'_0)$, 最后连续积分掉 k'_0 维度。此时圈图积分 G_N 变为

$$G_N(\infty) = \int_0^1 dx \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} M_0 (2x+1) \left(\frac{1}{\vec{k}^2 + \mathcal{M}_N^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{4} M_0 (M_0^2 x^3 + \mathcal{M}_N^2 (x+2)) \left(\frac{1}{\vec{k}^2 + \mathcal{M}_N^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (53)$$

利用 master 公式, 可得到圈图 5(b) 的有限体积修正

$$\delta G_N = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} M_0 (2x+1) \delta_{1/2}(\mathcal{M}_N^2) - \frac{1}{4} M_0 (M_0^2 x^3 + \mathcal{M}_N^2 (x+2)) \delta_{3/2}(\mathcal{M}_N^2) \right], \quad (54)$$

其中

$$\delta_r(\mathcal{M}^2) = \frac{2^{-1/2-r}(\sqrt{\mathcal{M}^2})^{3-2r}}{\pi^{3/2}\Gamma(r)} \sum_{\vec{n} \neq 0} (L\sqrt{\mathcal{M}^2}|\vec{n}|)^{-3/2+r} K_{3/2-r}(L\sqrt{\mathcal{M}^2}|\vec{n}|), \quad (55)$$

公式中 $K_n(z)$ 为第二类修正 Bessel 函数, $\sum_{\vec{n} \neq 0} \equiv \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} (1-\delta(|\vec{n}|, 0))$, 这里 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 。

利用同样的步骤, 可以很容易计算得到 $\mathcal{O}(p^4)$ 时包含虚的八重态重子圈图 5 和包含十重态重子的圈图 6 的有限体积修正。具体的表达式可以在文献 [89, 90] 中找到。

4.3 有限格点间距的离散效应

为了研究格点 QCD 模拟的离散效应, 需要首先引入 Symanzik 有效场论 [96, 97, 98, 99]。Symanzik 有效场论是用于描述格点规范场论在连续极限下的场论, 即离散空间的量子色动力学。通过在手征微扰理

论中引入相关对称性破缺的低能常数，可以容易地构造 Symanzik 有效场论，并且手征展开的结果自然地包含了格点间距的离散效应 [198]。Sharpe 和 Singleton [199] 以及 Lee 和 Sharpe [200] 首次将手征微扰理论扩展到包含有限格点间距的离散效应，将 Wilson 费米子 [26] 对应的离散效应计算到了 $\mathcal{O}(a)$ ，通常称为 Wilson 手征微扰理论 (WChPT)。之后还发展了描述基于 Staggered 费米子的手征微扰理论 [147, 149]，通常称为 Staggered 手征微扰理论 (SChPT)。2003 年，Munster 和 Schmidt [201] 将 WChPT 扩展到研究采用 twisted mass 费米子作用量 [151, 152] 的格点 QCD 的有限格点间距效应，通常称为 twisted mass 手征微扰理论 (tmChPT)。

在接近连续极限的情况下，格点 QCD 可以通过 Symanzik 作用量 [96, 97] 来描述，即以格点间距 a 作为小量进行微扰展开

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= S_0 + aS_1 + a^2S_2 + \cdots \\ &= \int d^4x (\mathcal{L}^{(4)} + a\mathcal{L}^{(5)} + a^2\mathcal{L}^{(6)} + \cdots), \end{aligned} \quad (56)$$

$\mathcal{L}^{(4)}$ 是连续的量子色动力学拉氏量， $\mathcal{L}^{(5)}$ 和 $\mathcal{L}^{(6)}$ 包含了格点量子色动力学的离散效应， \cdots 代表格点间距 a 的高阶项拉氏量。这里， $\mathcal{L}^{(5)}$ 只包含手征对称性破坏的项， $\mathcal{L}^{(6)}$ 包含手征对称性保持和破坏的项。在 u, d, s 三味空间中，量子色动力学的拉氏量写为

$$\mathcal{L}^{(4)} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - \mathcal{M})\psi, \quad (57)$$

其中，夸克质量矩阵为 $\mathcal{M} = \text{diag}(m_l, m_l, m_s)$ ， $\mathcal{D} = D_\mu \gamma^\mu$ ， D_μ 是协变微商。

在 $\mathcal{O}(a)$ 情况下，利用运动方程重新定义有效场之后，只剩下 Pauli 项 [99]

$$a\mathcal{L}^{(5)} = ac_{\text{SW}} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \omega_q \psi, \quad (58)$$

其中 $G_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$ ， c_{SW} 是 Sheikholeslami-Wohlert (SW) [98] 参数，只能通过数值方法定出。 ω_q ($q = u, d, s$) 是常数，在格点模拟中若采用 Wilson 类型费米子， $\omega_q = 1$ ，若采用 Ginsparg-Wilson 类型的费米子， $\omega_q = 0$ 。与夸克质量矩阵类似可定义 Wilson 矩阵， $\mathcal{W} = \text{diag}(\omega_l, \omega_l, \omega_s)$ ， ω_q 为对角元。Pauli 项是手征对称性破坏项，其手征行为和夸克质量项是一样的。这里需要注意的是，Pauli 项可以通过在格点模拟的作用量中加入 clover 项抵消 [103]，也就是所谓的 $\mathcal{O}(a)$ 改善的 Wilson 费米子作用量 [98, 99, 202, 203]。

在 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶情况下， \mathcal{L}_6 中共有 18 项，根据其是否破坏手征对称性和 $O(4)$ 旋转不变性，可分为五类 [105]：

- $\mathcal{L}_1^{(6)}$: 手征对称性不变的夸克双线性算符

$$\bar{\psi}\mathcal{D}^3\psi, \quad \bar{\psi}(D_\mu D_\mu \mathcal{D} + \mathcal{D} D_\mu D_\mu)\psi, \quad \bar{\psi}D_\mu \mathcal{D} D_\mu \psi. \quad (59)$$

- $\mathcal{L}_2^{(6)}$: 手征对称性破坏的夸克双线性算符

$$\bar{\psi}m_q D_\mu D_\mu \psi, \quad \langle m_q \rangle \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi, \quad \bar{\psi}m_q i\sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu} \psi, \quad \langle m_q \rangle \bar{\psi} i\sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu} \psi. \quad (60)$$

- $\mathcal{L}_3^{(6)}$: 手征对称性不变的四夸克算符

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)^2, \quad (\bar{\psi}\gamma_5 \psi)^2, \quad (\bar{\psi}t^a \gamma_\mu \psi)^2, \quad (\bar{\psi}t^a \gamma_5 \psi)^2, \quad (61)$$

其中 t^a 是 $\text{SU}(3)$ 群的生成元， $a = 1, \dots, 8$ 。

- $\mathcal{L}_4^{(6)}$: 手征对称性破坏的四夸克算符

$$(\bar{\psi}\psi)^2, \quad (\bar{\psi}\gamma_5 \psi)^2, \quad (\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu} \psi)^2, \quad (\bar{\psi}t^a \psi)^2, \quad (\bar{\psi}t^a \gamma_5 \psi)^2, \quad (\bar{\psi}t^a \sigma_{\mu\nu} \psi)^2. \quad (62)$$

- $\mathcal{L}_5^{(6)}$: $O(4)$ 旋转对称性破坏的夸克双线性算符

$$\bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu D_\mu D_\mu \psi. \quad (63)$$

为了构建 WChPT 的手征拉氏量，首先需在 Symanzik 有效场论框架下写出所有保持对称性不变的项，这可以通过标准的 Spurion 分析得到。在实际应用中，只需要知道哪些项是破坏对称性的及其破坏形式，就可构建出格点间距依赖的手征有效拉氏量。在构建 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶的手征拉氏量之前，需先确定加入格点间距 a 后系统的手征阶数。为了保证计算具有物理意义，格点 QCD 模拟中的夸克质量和格点间距必须满足如下关系：

$$m_q \ll \Lambda_{\text{QCD}} \ll \frac{1}{a}. \quad (64)$$

假设由轻夸克质量引起的手征对称性破缺效应和格点间距引起的对称性破缺效应是可比拟的 [103, 104, 105]，包含格点间距后，理论的手征计阶规则可以扩展为

$$p^2 \sim \frac{m_q}{\Lambda_{\text{QCD}}} \sim a\Lambda_{\text{QCD}}, \quad (65)$$

其中 p 是一个广泛意义上的小量， Λ_{QCD} 代表量子色动力学的典型能量标度。

计算到 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶，包含格点间距的手征拉氏量分别为 $\mathcal{O}(a)$, $\mathcal{O}(am_q)$ 和 $\mathcal{O}(a^2)$ 三个部分，可具体写为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a^{\text{eff}} &= \mathcal{L}^{\mathcal{O}(a)} + \mathcal{L}^{\mathcal{O}(am_q)} \\ &\quad + \mathcal{L}_1^{\mathcal{O}(a^2)} + \mathcal{L}_2^{\mathcal{O}(a^2)} + \mathcal{L}_3^{\mathcal{O}(a^2)} + \mathcal{L}_4^{\mathcal{O}(a^2)} + \mathcal{L}_5^{\mathcal{O}(a^2)}, \end{aligned} \quad (66)$$

其中 $\mathcal{L}_i^{\mathcal{O}(a^2)}$ ($i = 1, \dots, 5$) 分别对应在 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶情况下 Symanzik 作用量中的五类算符。

在 $\mathcal{O}(a)$ 阶下的手征拉氏量为

$$\mathcal{L}^{\mathcal{O}(a)} = \bar{b}_0 \langle \bar{B}B \rangle \langle \rho_+ \rangle + \bar{b}_D \langle \bar{B}[\rho_+, B]_- \rangle + \bar{b}_F \langle \bar{B}[\rho_+, B]_+ \rangle, \quad (67)$$

其中 \bar{b}_0 , \bar{b}_D 和 \bar{b}_F 是未知的低能常数，对应的量纲为质量⁻¹， $\langle \dots \rangle$ 代表味空间的求迹符号， $\rho_+ = u^\dagger \rho u^\dagger + u \rho^\dagger u$ 。拉氏量中包含 ρ 的项代表了有限格点间距导致的手征对称性破坏的项，其中 ρ 可以表示为 [100]

$$\rho = 2ac_{\text{SW}}W_0\mathcal{W}, \quad (68)$$

这里，常数 $W_0 = -\langle 0 | \bar{q} \sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu} q | 0 \rangle / F_\phi^2$ 是未知常数，其大小与手征破缺能标 Λ_{ChPT} 相关。

在 $\mathcal{O}(am_q)$ 阶的有效拉氏量可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathcal{O}(am_q)} &= \bar{b}_1 \langle \bar{B}\chi_+ \rho_+ B \rangle + \bar{b}_2 \langle \bar{B}\chi_+ B \rho_+ \rangle + \bar{b}_3 \langle \bar{B}\rho_+ B \chi_+ \rangle + \bar{b}_4 \langle \bar{B}B \chi_+ \rho_+ \rangle \\ &\quad + \bar{b}_5 \langle \bar{B}\chi_+ \rangle \langle \rho_+ B \rangle + \bar{b}_6 \langle \bar{B}\rho_+ \rangle \langle \chi_+ B \rangle + \bar{b}_7 \langle \bar{B}[\chi_+, B] \rangle \langle \rho_+ \rangle \\ &\quad + \bar{b}_8 \langle \bar{B}\{\chi_+, B\} \rangle \langle \rho_+ \rangle + \bar{b}_9 \langle \bar{B}[\rho_+, B] \rangle \langle \chi_+ \rangle + \bar{b}_{10} \langle \bar{B}\{\rho_+, B\} \rangle \langle \chi_+ \rangle \\ &\quad + \bar{b}_{11} \langle \bar{B}B \rangle \langle \chi_+ \rangle \langle \rho_+ \rangle + \bar{b}_{12} \langle \bar{B}B \rangle \langle \chi_+ \rho_+ \rangle, \end{aligned} \quad (69)$$

其中 $\bar{b}_{1, \dots, 12}$ 是量纲为质量⁻³ 的未知低能常数。上述表达式并不是最简形式，可以通过 Cayley-Hamilton 等式 [204]，消除掉 \bar{b}_3 对应的项：

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{perm}=6} \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle - \sum_{\text{perm}=8} \langle A_1 A_2 A_3 \rangle \langle A_4 \rangle - \sum_{\text{perm}=3} \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle \\ &+ \sum_{\text{perm}=6} \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 \rangle \langle A_4 \rangle - \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle \langle A_3 \rangle \langle A_4 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (70)$$

其中 ‘perm’ 代表排列组合的数目。所以，在 $\mathcal{O}(am_q)$ 情况下，拉氏量只含有 11 个独立的项。

在 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶下，采用文献 [105] 的符号约定，五类有效拉氏量 $\mathcal{L}_i^{\mathcal{O}(a^2)}$ ($i = 1, \dots, 5$) 可以分别写为：

- 第一类手征有效拉氏量

$$\mathcal{L}_1^{\mathcal{O}(a^2)} = a^2 c_{\text{SW}}^2 W_0^2 [\bar{c}_1 \langle \bar{B}B \rangle + \bar{c}_2 \langle \mathcal{O}_+ \rangle \langle \bar{B}B \rangle + \bar{c}_3 \langle \bar{B}[\mathcal{O}_+, B]_+ \rangle + \bar{c}_4 \langle \bar{B}[\mathcal{O}_+, B]_- \rangle], \quad (71)$$

其中算符 \mathcal{O}_+ 的定义为

$$\mathcal{O}_+ = 2 [u^\dagger (\mathcal{W} - \overline{\mathcal{W}}) u + u (\mathcal{W} - \overline{\mathcal{W}}) u^\dagger]. \quad (72)$$

这里的 $\overline{\mathcal{W}} = 1 - \mathcal{W} = \text{diag}(1 - \omega_l, 1 - \omega_l, 1 - \omega_s)$, $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_4$ 是四个未知的低能常数, 量纲为质量⁻³。

- 第二类手征有效拉氏量对应的算符中含有夸克质量 m_q , 因此拉氏量对应的手征阶数至少为 $\mathcal{O}(p^6)$, 超出了本工作的研究精度。
- 第三类手征有效拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{\mathcal{O}(a^2)} = & a^2 c_{\text{SW}}^2 W_0^2 [\bar{e}_1 \langle \bar{B}[\mathcal{O}_+, [\mathcal{O}_+, B]] \rangle + \bar{e}_2 \langle \bar{B}[\mathcal{O}_+, \{\mathcal{O}_+, B\}] \rangle \\ & + \bar{e}_3 \langle \bar{B}\{\mathcal{O}_+, \{\mathcal{O}_+, B\}\} \rangle + \bar{e}_4 \langle \bar{B}\mathcal{O}_+ \rangle \langle \mathcal{O}_+ B \rangle \\ & + \bar{e}_5 \langle \bar{B}[\mathcal{O}_+, B] \rangle \langle \mathcal{O}_+ \rangle + \bar{e}_6 \langle \bar{B}\{\mathcal{O}_+, B\} \rangle \langle \mathcal{O}_+ \rangle \\ & + \bar{e}_7 \langle \bar{B}B \rangle \langle \mathcal{O}_+ \rangle^2 + \bar{e}_8 \langle \bar{B}B \rangle \langle \mathcal{O}_+^2 \rangle], \end{aligned} \quad (73)$$

其中 \bar{e}_i 是未知的低能常数, 量纲为质量⁻³。上述七项并不是相互独立的, 可通过 Cayley-Hamilton 等式 [204], 将 \bar{e}_6 对应的项去掉:

$$\langle \bar{B}\{X^2, B\} \rangle + \langle \bar{B}XBX \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{B}B \rangle \langle X^2 \rangle - \langle \bar{B}X \rangle \langle BX \rangle = 0, \quad (74)$$

这里要求公式中的 $X = \mathcal{O}_+ - \frac{1}{3} \langle \mathcal{O}_+ \rangle$ 是 3×3 无迹矩阵。

- 第四类手征有效拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{\mathcal{O}(a^2)} = & \bar{d}_1 \langle \bar{B}[\rho_+, [\rho_+, B]] \rangle + \bar{d}_2 \langle \bar{B}[\rho_+, \{\rho_+, B\}] \rangle \\ & + \bar{d}_3 \langle \bar{B}\{\rho_+, \{\rho_+, B\}\} \rangle + \bar{d}_4 \langle \bar{B}\rho_+ \rangle \langle \rho_+ B \rangle \\ & + \bar{d}_5 \langle \bar{B}[\rho_+, B] \rangle \langle \rho_+ \rangle + \bar{d}_7 \langle \bar{B}B \rangle \langle \rho_+ \rangle^2 \\ & + \bar{d}_8 \langle \bar{B}B \rangle \langle \rho_+^2 \rangle, \end{aligned} \quad (75)$$

其中 \bar{d}_i 为七个未知的低能常数, 量纲为质量⁻³。由于算符 ρ_+ 和 χ_+ 的手征变换性质是一样的, 因此相应的手征拉氏量也是一样的。

- 第五类手征有效拉氏量, 即破坏 $O(4)$ 旋转不变性的拉氏量, 可以写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5^{\mathcal{O}(a^2)} = & a^2 c_{\text{SW}}^2 W_0^2 [\bar{f}_1 \langle \bar{B}D_\mu D_\mu D_\mu D_\mu B \rangle + \bar{f}_2 \langle \mathcal{O}_+ \rangle \langle \bar{B}D_\mu D_\mu D_\mu D_\mu B \rangle \\ & + \bar{f}_3 \langle \bar{B}D_\mu D_\mu D_\mu D_\mu [\mathcal{O}_+, B]_+ \rangle + \bar{f}_4 \langle \bar{B}D_\mu D_\mu D_\mu D_\mu [\mathcal{O}_+, B]_- \rangle], \end{aligned} \quad (76)$$

其中 \bar{f}_i 是未知的低能常数, 量纲为质量⁻³。这一项对八重态重子质量的贡献可以完全被公式 (71) 中的第一类拉氏量吸收。

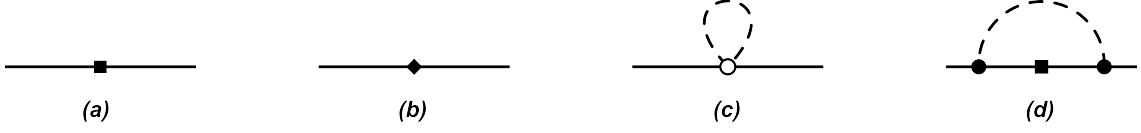
至此, 引入有限格点间距的离散效应后对应的手征有效拉氏量已经构造完成。接下来, 利用上述拉氏量, 计算相应的费曼图 (图 7), 就可以研究在 WChPT 理论下, 离散效应对八重态重子质量的影响。

八重态重子质量计算到次次领头阶, 并自洽包含有限格点间距效应的表达式为

$$m_B = m_0 + m_B^{(2)} + m_B^{(3)} + m_B^{(4)} + m_B^{(a)}, \quad (77)$$

其中, 最后一项 $m_B^{(a)}$ 代表计算到 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶下的有限格点间距效应。 $m_B^{(a)}$ 可以写为如下三个部分

$$m_B^{(a)} = m_B^{\mathcal{O}(a)} + m_B^{\mathcal{O}(am_q)} + m_B^{\mathcal{O}(a^2)}. \quad (78)$$



S

图 7: 有限格点间距 a 的离散效应对八重态重子质量的影响。其中实线代表八重态重子场，虚线代表八重态赝标介子场。实心方块 (菱形) 代表 $\mathcal{O}(a)$ [$\mathcal{O}(a^2)$] 的相互作用顶点，空心圆圈代表来自拉氏量 $\mathcal{L}^{\mathcal{O}(a)}$ 的相互作用顶点。对应的波函数重整化费曼图并没有显式给出，但计算中包含了它们的贡献。

需要指出，由于虚的十重态重子对八重态重子质量的手征延拓和有限体积修正的影响很小，它们的贡献并没有显式地包含进去 [90]。

对于非混合的 Wilson 作用量 (u 、 d 、 s 夸克全都是 Wilson 费米子)，Wilson 矩阵可以写为 $\mathcal{W} = \text{diag}(1, 1, 1)$ 。计算费曼图 [图 7(a)]，得到有限间距效应对八重态重子质量的 $\mathcal{O}(a)$ 阶贡献

$$m_B^{\mathcal{O}(a)} = -4ac_{\text{SW}}W_0(3\bar{b}_0 + 2\bar{b}_D). \quad (79)$$

计算到 $\mathcal{O}(am_q)$ 阶时，有限格点间距效应对八重态重子质量的贡献可以写为

$$\begin{aligned} m_B^{\mathcal{O}(am_q)} &= -16ac_{\text{SW}}W_0B_0(\xi_l m_l + \xi_s m_s) \\ &= -8ac_{\text{SW}}W_0(\xi_l M_\pi^2 + \xi_s(2M_K^2 - M_\pi^2)), \end{aligned} \quad (80)$$

其中，系数 ξ_l 和 ξ_s 可以在文献 [89] 中找到。引入参数组合 $\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 3\bar{b}_7 + 3\bar{b}_8 = \bar{B}_1$ ， $\bar{b}_4 - 3\bar{b}_7 + 3\bar{b}_8 = \bar{B}_2$ 和 $2\bar{b}_{10} + 3\bar{b}_{11} + \bar{b}_{12} = \bar{B}_3$ ， $\mathcal{O}(am_q)$ 阶的贡献只含有三个独立未知低能常数。

考虑 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶对重子质量的贡献时，需要分别计算四阶的树图 [图 7(b)] 和圈图 [图 7(c,d)]。利用 EOMS 方法移除掉圈图函数所含有的破坏计阶规则的解析项后，得到 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶离散效应对重子质量的贡献

$$\begin{aligned} m_B^{\mathcal{O}(a^2)} &= -a^2 c_{\text{SW}}^2 W_0^2 (\bar{C} + 16\bar{D} + 16\bar{E}) \\ &\quad - \frac{1}{(4\pi F_\phi)^2} ac_{\text{SW}}W_0 \sum_{\pi, K, \eta} \xi_{B,\phi}^{(c)} H_B^{(c)}(M_\phi) \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi F_\phi)^2} \sum_{\pi, K, \eta} \xi_{BB',\phi}^{(d)} H_{B,B'}^{(d)}(M_\phi), \end{aligned} \quad (81)$$

其中第一行来自树图 [图 7(b)] 的贡献，相应的参数组合 \bar{C} ， \bar{D} 和 \bar{E} 分别为： $\bar{C} = \bar{c}_1 + 4(3\bar{c}_2 + 2\bar{c}_3)$ ， $\bar{D} = 4\bar{d}_3 + 9\bar{d}_7 + 3\bar{d}_8$ ， $\bar{E} = 4\bar{e}_3 + 9\bar{e}_7 + 3\bar{e}_8$ 。进一步还可以引入参数组合 \bar{X} ，使得 $\bar{C} + 16\bar{D} + 16\bar{E} = 16\bar{X}$ 作为唯一一个未知的自由参数。公式 (81) 的第二行来自于蝌蚪图 [图 7(c)] 的贡献，最后一项来自于四阶圈图 [图 7(d)]，相应的耦合系数和圈图函数可以在文献 [89] 中找到。

5 协变手征微扰理论对格点 QCD 重子质量模拟的系统研究

本节主要利用上节推导的次次次领头阶八重态重子质量公式，结合最新的格点 QCD 数据，研究格点重子质量数据的手征延拓、有限体积修正效应和有限格点间距的离散效应；检验不同格点合作组计算重子质量的自洽性；利用拟合得到的低能常数，讨论协变重子手征微扰理论的收敛性质以及虚的十重态重子对八重态重子质量的影响。

5.1 八重态重子质量的轻夸克质量依赖

由于次次次领头阶八重态重子质量公式 (43) 中含有 19 个未知的低能常数 ($m_0, b_0, b_D, b_F, b_{1-8}, d_{1-5,7,8}$)，仅通过重子质量的实验值无法确定。因此，本小节主要利用质量公式 (43)，同时拟合目前最新的格点 QCD 质量数据 (PACS-CS、LHPC、HSC、QCDSF-UKQCD 和 NPLQCD)，自洽考虑格点有限体积修正，确定 19 个低能常数的数值，研究八重态重子质量的手征延拓，检验不同格点合作组计算结果的自洽性及协变手征微扰理论的收敛性质。

除以上需要确定的 19 个低能常数外，八重态重子质量公式 (43) 中还有介子衰变常数 F_ϕ 、轴矢耦合常数 D 和 F 、重整化标度 μ 需要确定。对于介子衰变常数 F_ϕ ，原则上可以使用介子衰变常数的手征极限数值 $F_\phi = 87.1 \text{ MeV}$ (基于两圈图的手征微扰理论计算得到 [205])，或者采用 SU(3) 下的平均值 $F_\phi = 1.17F_\pi$ [82]，其中 $F_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ 为 π 介子衰变常数的物理值。这两种选择产生的差别可以归结为手征展开的高阶项贡献。在次次次领头阶的实际计算中发现：八重态重子质量对介子衰变常数的

表 3: 利用次领头、次次领头阶和次次次领头阶重子手征微扰理论拟合八重态重子质量格点 QCD 数据和相应的实验值，所得到的低能常数的数值以及相应的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 。取自参考文献 [89]。

	$(\bar{D})\text{-NLO}$	$(\bar{D})\text{-NNLO}$	$(\bar{D})\text{-N}^3\text{LO}$	$D\text{-N}^3\text{LO}$
$m_0 \text{ [MeV]}$	900(6)	767(6)	880(22)	908(24)
$b_0 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	-0.273(6)	-0.886(5)	-0.609(19)	-0.744(16)
$b_D \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	0.0506(17)	0.0482(17)	0.225(34)	0.355(20)
$b_F \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	-0.179(1)	-0.514(1)	-0.404(27)	-0.552(28)
$b_1 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	—	—	0.550(44)	1.08(6)
$b_2 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	—	—	-0.706(99)	0.431(93)
$b_3 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	—	—	-0.674(115)	-1.83(15)
$b_4 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}$	—	—	-0.843(81)	-1.57(4)
$b_5 \text{ [GeV}^{-2}\text{]}$	—	—	-0.555(144)	-0.355(74)
$b_6 \text{ [GeV}^{-2}\text{]}$	—	—	0.160(95)	-0.423(117)
$b_7 \text{ [GeV}^{-2}\text{]}$	—	—	1.98(18)	2.79(15)
$b_8 \text{ [GeV}^{-2}\text{]}$	—	—	0.473(65)	-1.73(6)
$d_1 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	0.0340(143)	0.0157(130)
$d_2 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	0.296(53)	0.445(57)
$d_3 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	0.0431(304)	0.328(18)
$d_4 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	0.234(67)	-0.117(59)
$d_5 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	-0.328(60)	-0.853(77)
$d_7 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	-0.0358(269)	-0.425(39)
$d_8 \text{ [GeV}^{-3}\text{]}$	—	—	-0.107(32)	-0.557(56)
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	11.8	8.6	1.0	1.0

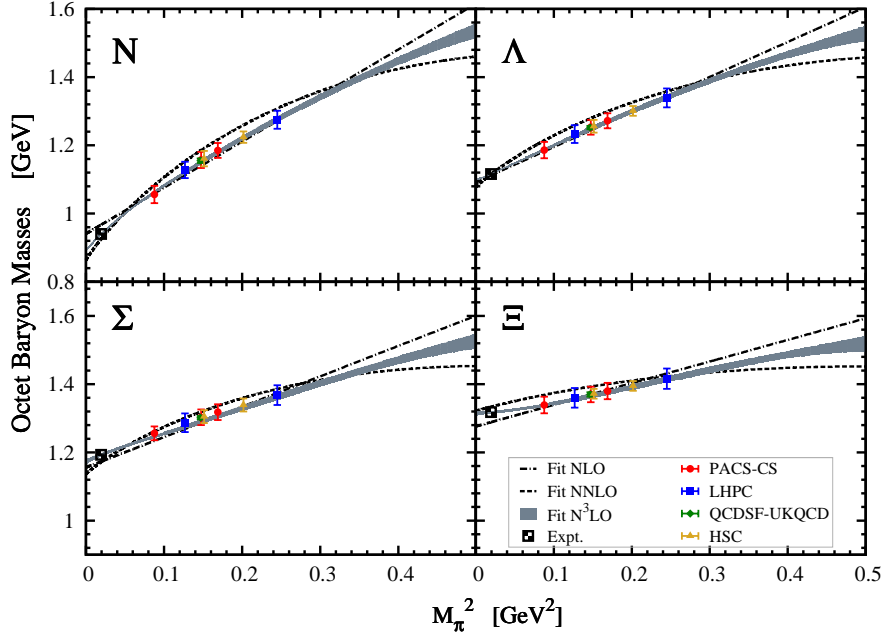


图 8: 八重态重子质量 m_B 随 π 介子质量 M_π^2 的演化。图中奇异夸克的质量确定为其物理值。取自参考文献 [89]。

两种取值并不敏感。因此在本文介绍的基于协变手征微扰理论的工作中，除非特别说明，均采用手征极限下的介子衰变常数 F_ϕ 。重子的轴矢耦合常数 D 和 F 的数值，可以利用 $SU(6)$ 关系 $F = 2/3D$ ，并结合 $D + F = g_A$ (其中 $g_A = 1.26$ 是核子的轴矢耦合常数) 来进行确定，得到 $D = 0.8$, $F = 0.46$ 。在具体计算中，我们还允许 D, F 的数值自由变动，发现拟合格点数据所得到的 D, F 的数值和所选用的数值是自洽的。最后，重整化能量标度 μ 设定为 1 GeV [82]。

在第二章中，我们简要介绍了最新的五个 $N_f = 2 + 1$ 格点计算重子质量的工作。为了保证研究的格点数据在次次领头阶重子手征微扰理论的适用范围内和格点有限体积修正的可控性，所选用的格点数据需满足 $M_\pi < 500 \text{ MeV}$ 和 $M_\pi L > 4$ 。经过筛选共有 11 组格点数据满足要求，分别来自 PACS-CS (3 组)、LHPC (2 组)、HSC (2 组)、QCDSF-UKQCD (1 组)、NPLQCD (3 组)。

由于需要同时拟合五个格点合作组计算的八重态重子质量数据，考虑格点数据间存在的关联是非常必要的 (不同合作组的格点数据彼此没有关联)。对同一格点合作组的计算数据，由于有限格点间距 a 的不确定性，使得不同夸克质量下的八重态重子质量数据是彼此关联的。在用最小二乘法拟合格点数据时，对同一格点合作组的数据引入关联矩阵 $C_{ij} = \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} + \delta a_i \delta a_j$ (具体讨论参见文献 [82])。关联矩阵 C_{ij} 中， σ_i 是格点数据本身的统计误差， δa_i 是由格点间距的不确定度引起的重子质量数据的误差。

接下来，利用包含有限体积修正的次次领头阶的重子八重态质量表达式 [公式 (43)]，借助最小二乘法，同时拟合 PACS-CS、LHPC、HSC、QCDSF-UKQCD、NPLQCD 的质量数据和八重态重子质量的实验值⁷。最好的拟合结果 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 和相应的低能常数的数值在表 3 中列出。接下来，为研究不同手征展开阶数对格点数据的描述情况，我们分别利用次领头阶和次次领头阶的重子质量公式，拟合了相同的格点数据，将最好的拟合结果 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 和低能常数的数值也一并列在表 3 中。从表中可以看出，随着手征展开阶数的增加，拟合得到的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 逐渐减小，呈现出对格点数据描述逐渐改善的趋势。若只停留在 $\mathcal{O}(p^3)$ 阶数，手征展开的重子质量公式不能同时描述五个格点合作组数据，对应的 $\chi^2/\text{d.o.f.} = 8.6$ 。而利用次次领头阶的质量公式就可以同时描述格点数据和重子质量的实验值，并且拟合得到的 19 个低能常数的数值比较合理，尤其是八重态重子的手征极限质量 $m_0 = 880 \text{ MeV}$ 和近

⁷在拟合中包含重子八重态质量的实验值对于预言重子的 σ 项以及更好地限制拟合得到的低能常数是重要的。

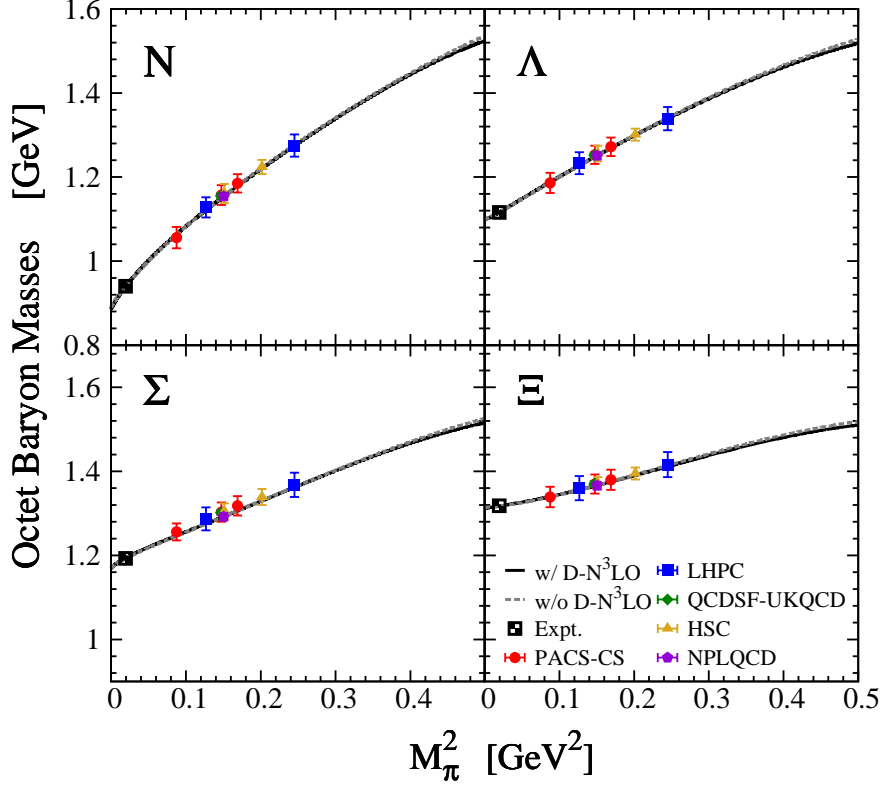


图 9: 基态八重态重子质量随 π 介子质量的演化。图中的格点数据已经考虑了有限体积修正，奇异夸克的质量确定为其物理值。取自参考文献 [90]。

期的 SU(2) 计算结果一致 [95, 206, 207]。

在上述计算中，自治包含格点计算的有限体积效应对确定重子手征微扰理论中的低能常数数值和改善格点数据的描述是非常重要的。若不考虑有限体积修正，利用上述相同的格点数据得到的最好拟合结果为 $\chi^2/\text{d.o.f.} = 1.9$ 。

图 8 展示了八重态重子质量 $m_N, m_\Lambda, m_\Sigma, m_\Xi$ 对轻夸克质量 (通常轻夸克质量 m_l 和 π 介子质量 M_π 利用领头阶的手征微扰理论联系起来) 的依赖关系，其中奇异夸克质量 m_s 设为物理值。从图中可以看出次次领头阶的依赖关系曲线比较弯曲，不能描述相应区域的格点数据。而次次次领头阶的关系曲线可以很好地描述格点数据和八重态重子的实验值。值得注意的是，目前格点数据对轻夸克质量的依赖关系接近线性。其它的研究也注意到这一现象 [42]。

5.2 虚的十重态重子的效应

这一小节将系统研究虚的十重态重子对基态八重态重子质量的影响，尤其是对格点数据的手征延拓和格点的有限体积修正的影响。

在手征阶数为 $\mathcal{O}(p^4)$ 的情况下，若进一步考虑虚的十重态重子的贡献 [公式 (44)]，就不可避免地引入 4 个新的低能常数 m_D, t_0, t_D 和 ϕBT 耦合常数 \mathcal{C} 。其中，耦合常数 \mathcal{C} 可通过十重态重子衰变到八重态重子和八重态介子的衰变几率来确定，通常取 SU(3) 平均值: $\mathcal{C} = 0.85$ [133]⁸。在具体计算中，我们发现在一定的范围内改变 \mathcal{C} 的数值，对拟合结果影响较小。低能常数 m_D, t_0, t_D 可以利用次领头阶的十重态重子质量公式 $(m_D - \sum_{\phi=\pi, K} \xi_{D,\phi}^{(2)} M_\phi^2)$ 拟合实验值来确定。因为低能常数 m_D, t_0 在同一个 π 介子质量下不能区分，所以经过拟合可以得到 $m_D^{\text{eff}} = m_D - t_0(2M_K^2 + M_\pi^2) = 1.215 \text{ GeV}$,

⁸在文献 [82][132] 中，耦合常数的数值通过 $\Delta(1232) \rightarrow \pi N$ 衰变几率进行确定的， $\mathcal{C} = 1.0$ 。在我们之前利用次次领头阶的重子八重态质量公式研究 NPLQCD 格点数据时，自治得到的耦合常数的数值较小 [83]。

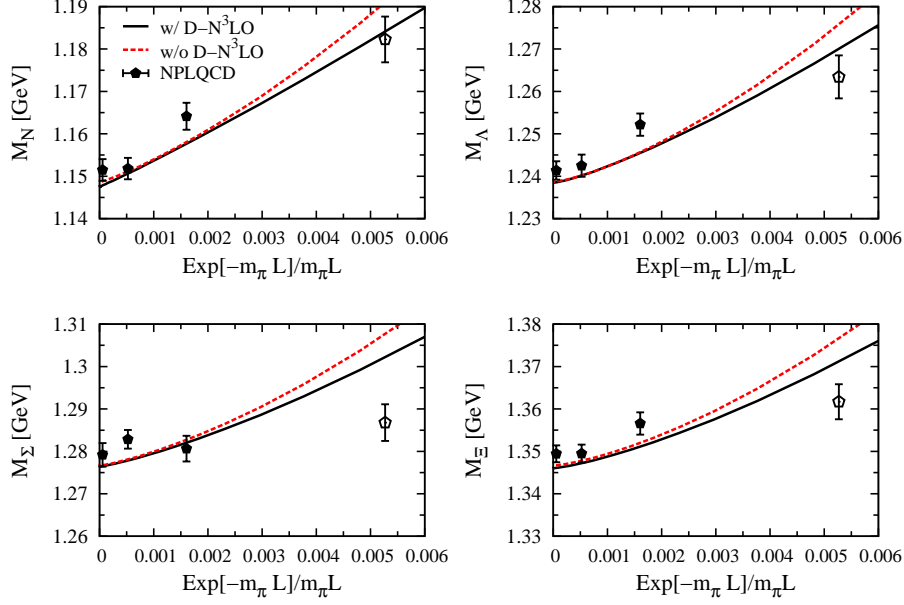


图 10: 八重态重子质量的有限体积修正。图上三个实心点是 $M_\phi L > 4$ 的, 包含在拟合的数据中, 而空心点是 $M_\phi L = 3.86$ 并没有包含在拟合中。取自参考文献 [90]。

$t_D = -0.326 \text{ GeV}^{-1}$ 。进一步, 利用八重态与十重态重子的平均质量差 $\delta = m_D - m_0 = 0.231 \text{ GeV}$, 就可得到 $m_D = m_0 + 0.231 \text{ GeV}$, $t_0 = (m_0 - 0.984)/0.507 \text{ GeV}^{-1}$ 。至此, 考虑虚的十重态重子贡献所引入的 4 个低能常数数值就完全固定了。质量公式中所含有的其他低能常数取值同上一小节 [89]。

遵循上一小节的拟合方法和相同的格点数据 [89], 可以利用显式包含虚的十重态重子贡献的质量公式 (公式 44) 来拟合五个格点合作组 (PACS-CS、LHPC、HSC、QCDSF-UKQCD、NPLQCD) 的八重态重子质量数据和相应的实验值。表 3 给出了拟合格点数据得到的低能常数和相应的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 。可以看出, 两种方法得到的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 是相同的, 说明包含虚的十重态重子的贡献对格点数据的描述改善不大。另一方面, 两种方法对应的低能常数的数值则变化很大, 这正好验证了文献 [89] 中的假设: 只拟合八重态重子质量数据, 并不能区分虚的十重态重子贡献和其它短程物理的贡献, 即虚的十重态重子的贡献大部分可以被只包含八重态重子贡献的质量公式中的 19 个低能常数吸收。

图 9 展示了八重态重子质量 m_B 对 π 介子质量 M_π 的依赖关系。可以看出, 在 $\mathcal{O}(p^4)$ 协变重子手征微扰理论下计算的八重态重子质量, 包含或不包含虚的十重态重子的贡献, 对格点数据的描述是一样的。虚的十重态重子对八重态重子质量的手征延拓影响较小。

接下来, 我们将主要讨论虚的十重态重子对格点有限体积修正的影响。如第二章所述, NPLQCD 格点合作组的计算结果为研究格点的有限体积修正效应提供了很好的机会。NPLQCD 采用同一个 π 介子质量 $M_\pi \simeq 390 \text{ MeV}$, 四个不同的格点盒子长度 $L \sim 2.0, 2.5, 3.0, 3.9 \text{ fm}$ 。图 10 给出了次次领头阶下重子手征微扰理论计算的重子质量和 NPLQCD 合作组格点数据的对比。NPLQCD 格点数据中有三组满足 $M_\phi L > 4$, 包含在之前拟合的格点数据中, 用实心点表示; 另一组数据 $M_\pi L = 3.86$, 没有包含在拟合中, 用空心点表示。可以看出, 包含虚的十重态重子的贡献与否, 都可以较好地描述有限体积修正效应。具体来说, 在 $e^{-m_\pi L}/(m_\pi L) \leq 0.002$ 的区域内, 两者结果相同; 随着 $e^{-m_\pi L}/(m_\pi L)$ 的增加 (格点盒子长度 L 减小), 包含虚的十重态重子的结果可以更好地描述 NPLQCD 的数据, 特别是核子质量。因此, 虚的十重态重子的贡献可以稍微改善协变手征微扰理论对格点有限体积修正的描述。

5.3 有限格点间距的离散效应

由于目前大部分的格点 QCD 模拟采用单一的格点间距 a , 因此单独一个格点合作组的数据

无法用于研究有限格点间距的离散效应。通常有限格点间距效应作为计算结果的系统误差。若要定量研究有限格点间距的离散效应，一个方法是同时拟合不同的格点合作组的计算数据。本文系统研究的格点 QCD 模拟大部分采用的是 $\mathcal{O}(a)$ 改善的或者叫做 clover 的 Wilson 作用量，例如 PACS-CS (格点间距 $a = 0.0907(14)$ fm, $c_{\text{SW}} = 1.715$), QCDSF-UKQCD (格点间距 $a = 0.0795$ fm, $c_{\text{SW}} = 2.65$), HSC 和 NPLQCD (空间维度的格点间距 $a_s = 0.1227(8)$ fm, 时间维度的格点间距 $a_t = 0.03506(23)$ fm, $c_{\text{SW}}^s = 2.6$, $c_{\text{SW}}^t = 1.8$)。上述四组格点计算中采用了三个不同的格点间距值和轻夸克质量，原则上可以用来定量地研究格点计算八重态重子质量的离散效应。

需要指出的是，格点合作组 HSC 和 NPLQCD 计算重子质量时，采用的是各向异性的 clover 费米子作用量 [208]。此作用量中，时间维度的格点间距的数值比空间维度的要小，约为 $a_s/a_t = 3.5$ 。文献 [108] 利用有效场论对这种各向异性的费米子作用量进行了研究。原则上更适合研究 HSC 和 NPLQCD 的格点数据的离散效应。但另一方面，各向异性作用下构造的有效理论需要引入更多的自由参数来区分时间和空间维度的离散效应。由于受到目前格点数据的限制，不能完全确定上述有效理论中的低能常数。因此在本研究中，我们假设 HSC 和 NPLQCD 合作组中时间维度的格点间距 a_t 等于空间维度的格点间距 a_s ，把 a_t 与 a_s 之间的差别归为更高阶的离散效应。

为了定量研究有限格点间距的离散效应，需要同时拟合 PACS-CS、QCDSF-UKQCD、HSC 和 NPLQCD 格点合作组的八重态重子质量数据。类似文献 [90]，为了保证 SU(3) 协变手征微扰理论的适用性，格点数据需要同时满足 $M_\pi < 500$ MeV 和 $M_\phi L > 3.8$ 。满足条件的格点数据共有 12 组，其中 PACS-CS 3 组、QCDSF-UKQCD 2 组、HSC 3 组、NPLQCD 4 组。为了更好地确定低能常数的数值，八重态重子质量的实验值也包含在拟合数据之中。

在 $\mathcal{O}(a)$ 改善的 Wilson 作用量中，Pauli 项 $a\mathcal{L}^{(5)}$ 是不存在的，因此八重态重子质量的离散效应 $m^{(a)}$ 只包含 $\mathcal{O}(am_q)$ 和 $\mathcal{O}(a^2)$ 两项，可表示为

$$\begin{aligned} m_B^{(a)} &= m_B^{\mathcal{O}(am_q)} + m_B^{\mathcal{O}(a^2)} \\ &= -8ac_{\text{SW}}W_0 (\xi_l M_\pi^2 + \xi_s(2M_K^2 - M_\pi^2)) - 16a^2 c_{\text{SW}}^2 W_0^2 \bar{X}. \end{aligned} \quad (82)$$

此时，包含格点间距离散效应的八重态重子质量公式 (77) 中，除了连续空间中的重子质量表达式中的 19 个低能常数外，还有 4 个新引入的低能常数组合： \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , \bar{B}_3 和 \bar{X} 。公式中其他参数的取值同上。

为了研究八重态重子质量的离散效应，我们进行了如下两种拟合：1，利用连续的八重态重子质量

表 4: 考虑或忽略有限格点间距 a 的离散效应的两种拟合方法得到的低能常数数值和相应的 χ^2 ($\chi^2/\text{d.o.f.}$)。取自参考文献 [92]。

	BChPT	WBChPT		BChPT	WBChPT
m_0 [MeV]	910(20)	915(20)	d_1 [GeV^{-3}]	0.0295(124)	-0.0196(121)
b_0 [GeV^{-1}]	-0.579(56)	-0.557(50)	d_2 [GeV^{-3}]	0.342(65)	0.230(58)
b_D [GeV^{-1}]	0.211(56)	0.201(48)	d_3 [GeV^{-3}]	-0.0314(63)	-0.0557(56)
b_F [GeV^{-1}]	-0.434(43)	-0.359(41)	d_4 [GeV^{-3}]	0.372(114)	0.304(1008)
b_1 [GeV^{-1}]	0.730(10)	0.810(8)	d_5 [GeV^{-3}]	-0.401(110)	-0.237(88)
b_2 [GeV^{-1}]	-1.21(18)	-0.819(26)	d_7 [GeV^{-3}]	-0.0913(58)	-0.104(48)
b_3 [GeV^{-1}]	-0.340(153)	-0.357(12)	d_8 [GeV^{-3}]	-0.132(79)	-0.0417(67)
b_4 [GeV^{-1}]	-0.776(16)	-0.780(15)	\bar{B}_1 [GeV^{-3}] $\times 10^{-2}$	-	-0.121(103)
b_5 [GeV^{-2}]	-1.15(287)	-1.34(23)	\bar{B}_2 [GeV^{-3}] $\times 10^{-2}$	-	-0.467(109)
b_6 [GeV^{-2}]	0.778(390)	0.889(199)	\bar{B}_3 [GeV^{-3}] $\times 10^{-2}$	-	0.344(267)
b_7 [GeV^{-2}]	0.899(26)	0.787(14)	\bar{X} [GeV^{-3}] $\times 10^{-4}$	-	0.606(5723)
b_8 [GeV^{-2}]	0.627(37)	0.817(28)			
χ^2	30.0	28.0	$\chi^2/\text{d.o.f.}$	0.91	0.97

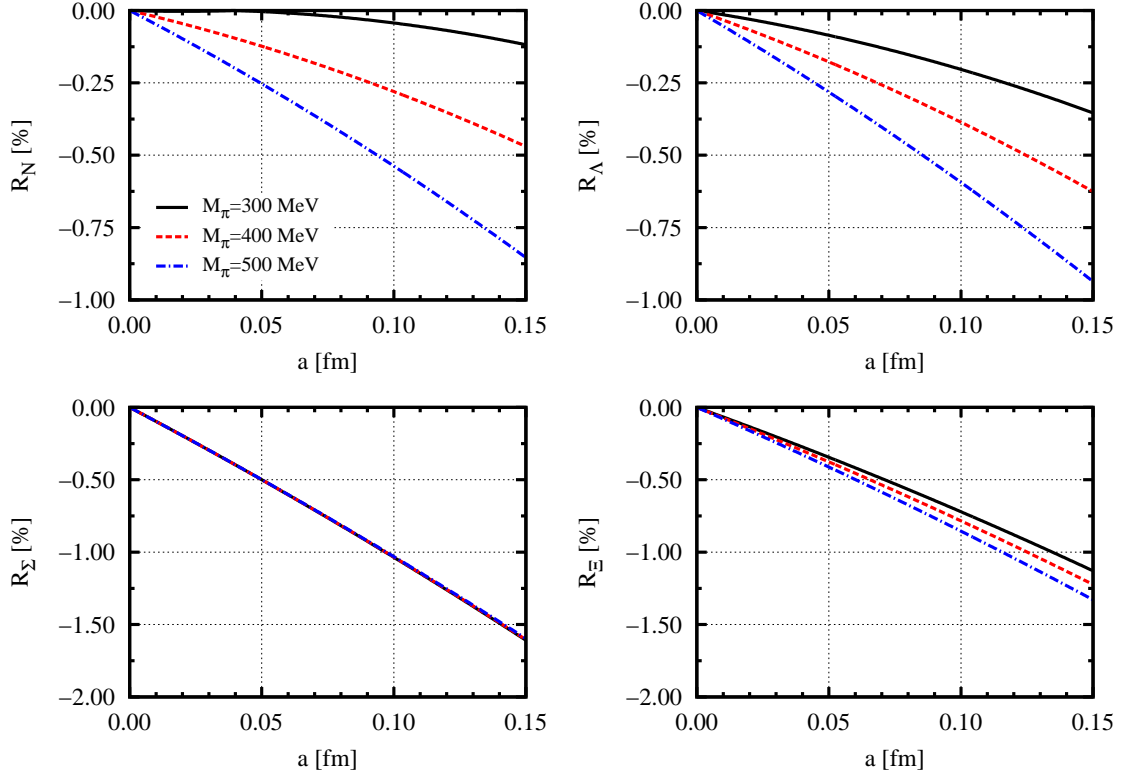


图 11: 八重态重子质量的有限格点间距效应 $R_B = m_B^{(a)}/m_B$ 随格点间距 a 及 π 介子质量的演化。其中 SW 系数取 PACS-CS 合作组采用的值: $c_{\text{SW}} = 1.715$, 奇异夸克质量固定为其物理值。取自参考文献 [92]。

公式 [公式 (43)] 拟合 12 组格点数据和重子质量的实验值; 2, 利用包含有限格点间距效应的公式 [公式 (77)] 拟合相同的质量数据。需要指出, 以上两种拟合中都自洽包含了格点的有限体积修正。表 4 列出了最优拟合的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 和相应的低能常数数值。对比来看, 两种拟合方法得到的 19 个低能常数的数值变化很小, 相应的 χ^2 从 30 变为 28。这表明包含有限格点间距的离散效应, 可以稍微改善对格点数据的描述。但每自由度的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 却由原来的 0.91 上升到 0.97, 表明离散效应对于描述现有格点数据的影响很小。这也证实了之前一些理论研究中将有限格点间距的离散效应作为系统误差是合理的。需要注意的是, 新引入的 4 个低能常数 \bar{B}_1 、 \bar{B}_2 、 \bar{B}_3 、 \bar{X} 误差很大, 特别是 \bar{X} 。为了能够更为精确地研究格点间距的离散效应, 需要进一步增加格点 QCD 计算数据, 尤其是包含多个格点间距的数据。

图 11 展示了有限格点间距的离散效应 $m_B^{(a)}$ 作为格点间距 a 的函数, 在三个不同的 π 介子质量 ($M_\pi = 300, 400, 500$ MeV) 情况下的变化趋势。首先, 在 π 介子质量固定的情况下, 随着格点间距 a 的增大, 有限格点间距的离散效应 $m_B^{(a)}$ 线性增长; 其次, 在固定格点间距 a 的情况下, 随着 π 介子质量的增大, 离散效应也相应的增大。以上结果表明 $\mathcal{O}(am_q)$ 起主导作用, $\mathcal{O}(a^2)$ 的贡献相对较小。若不考虑 $\mathcal{O}(a^2)$ 项的贡献, $\bar{X} = 0$, 所得到的拟合结果和有限格点间距的离散效应的变化趋势几乎没有变化。需要指出, 当格点间距达到 $a = 0.15$ fm 时, 有限格点间距的离散效应大约占八重态重子质量的 1%, 这和近期格点 QCD 的研究结果一致 [209]。因此, 计算到 $\mathcal{O}(a^2)$ 阶数下的有限格点间距的离散效应很小, 可当做系统误差处理。

6 八重态重子 sigma 项的精确预言

理解核子中的海夸克贡献，特别是奇异夸克 ($s\bar{s}$) 成分，一直是核物理研究的热点问题 [210]。在过去的数十年，奇异海夸克对质子自旋 [211]、电磁形状因子 [212, 213, 214]、核子磁矩 [215] 等物理量的贡献受到广泛关注。核子的奇异 sigma 项， $\sigma_{sN} = m_s \langle N | \bar{s}s | N \rangle$ ，在核子的标量奇异组分、核子质量组成、 KN 散射、寻找 Higgs 玻色子实验的计数率 [216] 和通过 LHC 上 pp 对撞实验精确测量标准模型参数的研究 [217] 中都起着重要作用。尤其对于暗物质直接探测的实验，精确测量奇异 sigma 项至关重要 [218, 219, 220, 221, 222, 223]。这是因为 σ_{sN} 的不确定度是弱相互作用大质量粒子 (Weakly Interacting Massive Particle, WIMP) 和核子散射截面误差的最主要来源。

虽然 π 介子-核子的 sigma 项 $\sigma_{\pi N} = m_l \langle N | \bar{u}u + \bar{d}d | N \rangle$ 可以通过 πN 散射实验来得到 [224, 225, 226, 227]，但核子的奇异 sigma 项却只能间接地通过味八重态矩阵元 $\sigma_0 = m_l \langle N | \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s | N \rangle$ 来确定，并且得到的 σ_{sN} 不确定度很大，可以在 0 到 300 MeV 范围内变动 [133]。近年来，格点 QCD 提供了一个模型无关的计算重子 sigma 项的方法：直接计算三点关联函数 [228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235] 和计算两点关联函数 [47, 69, 89, 233, 236, 237, 238, 239]。但这方面的诸多努力，由于存在较多的系统和统计误差，对核子的标量奇异组分还没有可靠的数值结果。其中，最重要的系统误差来源于手征延拓。

因此，寻找一个合适的重子手征微扰理论是非常关键的。在 u 、 d 、 s 三味空间中，描述低能非微扰量子色动力学比较合适的重子手征微扰理论需要满足所有的对称性和解析性质。从这个意义上来说，EOMS 重子手征微扰理论在理论基础和实践中都表现出很多的优势，解决了一系列单重子系统长期存在的谜团 [188, 191]，在研究格点八重态重子质量数据方面也相当成功 [89, 90, 91]。另一方面，近期 Shanahan 等人 [237, 240] 指出，采用质量相关 (mass-dependent) 或质量无关 (mass-independent) 的格点定标方法会导致 σ_{sN} 出现 3 ~ 5 倍的差别。因此，只通过单一格点合作组的数据和某一种定标方法来确定 σ_{sN} 可能会带来较大的系统误差。

文献 [93] 利用协变重子手征微扰理论，计算八重态重子质量到次次领头阶，结合最新、高统计量的 $N_f = 2 + 1$ 格点合作组 PACS-CS [40]、LHPC [42] 和 QCDSF-UKQCD [45] 的八重态重子质量数据，运用 Feynman-Hellmann 定理，考虑格点数据的不同定标方法，精确预言了重子 sigma 项，尤其是核子的奇异 sigma 项。

在同位旋极限下 ($m_u = m_d \equiv m_l$)，利用 Feynman-Hellmann 定理 [241]，八重态重子的 sigma 项可以通过八重态重子质量 m_B 的轻夸克质量依赖关系得到：

$$\sigma_{\pi B} = m_l \langle B | \bar{u}u + \bar{d}d | B \rangle \equiv m_l \frac{\partial m_B}{\partial m_l}, \quad (83)$$

$$\sigma_{sB} = m_s \langle B | \bar{s}s | B \rangle \equiv m_s \frac{\partial m_B}{\partial m_s}, \quad (84)$$

其中 m_B 是计算到 $\mathcal{O}(p^4)$ 的八重态重子质量 [公式 (43)]。

6.1 精确确定 sigma 项的三个关键因素

为了精确确定八重态重子的 sigma 项，以下三个因素至关重要。首先，需要选择高统计量的格点八重态重子质量数据，这样才能可靠地确定手征微扰理论中的未知低能常数。虽然文献 [89, 242] 的研究证实了当前格点计算的结果大部分是自洽的，但并不是所有的格点数据具有同等质量的统计性。例如 HSC 格点合作组 [43] 的质量数据需要增加统计量；NPLQCD 格点合作组 [46] 的计算均采用同一个夸克质量；BMW 格点合作组 [39] 的计算尽管具有很高的统计性，但原始的格点质量数据 (以格点间距为单位的数据) 并未公开发表。因此，目前可利用的高统计量的格点数据分别来自 PACS-CS、LHPC 和 QCDSF-UKQCD 三个格点合作组。需要重点指出的是，大部分格点 QCD 计算通常将奇异夸克质量固定并尽量接近其物理值，然后从大到小变化轻夸克质量。显然这些格点数据非常适合研究轻夸克质量的依赖，而对于研究奇异夸克质量依赖并不太适合。针对这一点，QCDSF-UKQCD 格点合作组的八重态重子质量数据就显得额外重要。这是因为 QCDSF-UKQCD 计算是在保证物理点处

夸克平均质量 $\bar{m} = (2m_l + m_s)/3$ 不变的情况下, 从低于奇异夸克物理质量的区域内大范围变动其质量 (具体结果可参看图 4)。为了保证重子手征微扰理论的有效性, 需要进一步限制研究的格点 QCD 数据: $M_\pi < 500$ MeV 和 $M_\phi L > 3.8$ [90, 92]。由于 QCDSF-UKQCD 的计算采用的是比值方法 (ratio method) [45], 其格点有限体积修正效应较小, 所以 $M_\phi L > 3.8$ 的限制条件对 QCDSF-UKQCD 格点合作组并不适用。

其次, 格点 QCD 模拟的不同定标方法对 sigma 项的影响。近期, Shanahan 等人利用 FRR 重子手征微扰理论计算八重态重子质量到次次领头阶并分析 PACS-CS 格点数据, 利用 Feynman-Hellmann 定理计算了重子 sigma 项 [237]。他们的研究指出, 取决于选用质量相关的 Sommer scale r_0 [243] 方法或质量无关的方法来确定 PACS-CS 格点合作组的格点间距, 所预言的核子奇异 sigma 项有较大改变。文献 [244] 也指出, 对于 LHPC 格点合作组的数据更倾向于利用 r_1 来定标。另外, 在质量无关的定标方法下, Lutz 等人 [242] 利用重子手征微扰理论研究无量纲的格点 QCD 数据来自洽确定格点间距。综上, 若要精确预言重子 sigma 项, 就非常有必要系统研究不同定标方法的影响 (关于格点定标方法的更为详细的讨论可参看综述文献 [158])。文献 [93] 首次研究了三种定标方法——质量无关定标方法且格点间距为格点合作组计算结果 (a fixed)、质量无关定标方法但格点间距通过手征微扰理论自洽获得 (a free) 和质量相关的定标方法——对重子 sigma 项的影响。

第三, 强相互作用引起的八重态重子质量的同位旋破缺可以更好地限制手征微扰理论中低能常数的数值。如前所述, 八重态重子质量的次次次领头阶表达式中含有较多的 (19 个) 未知低能常数。为了能

表 5: 拟合八重态重子质量的格点 QCD 数据和实验值所得到的的低能常数。其中每组格点数据均采用了 “mass independent” scale setting (MIS) 和 “mass dependent” scale setting (MDS) 方法。在 MIS 方法中, 又分为两种: 利用由格点合作组确定的格点间距称为 “ a fixed” ; 通过手征微扰理论自洽确定的格点间距称为 “ a free” 。取自参考文献 [93]。

	MIS		MDS
	a fixed	a free	
m_0 [MeV]	884(11)	877(10)	887(10)
b_0 [GeV $^{-1}$]	-0.998(2)	-0.967(6)	-0.911(10)
b_D [GeV $^{-1}$]	0.179(5)	0.188(7)	0.039(15)
b_F [GeV $^{-1}$]	-0.390(17)	-0.367(21)	-0.343(37)
b_1 [GeV $^{-1}$]	0.351(9)	0.348(4)	-0.070(23)
b_2 [GeV $^{-1}$]	-0.827(107)	-0.699(169)	-0.553(214)
b_3 [GeV $^{-1}$]	0.582(55)	0.486(11)	0.567(75)
b_4 [GeV $^{-1}$]	-0.732(27)	-0.966(8)	-1.30(4)
b_5 [GeV $^{-2}$]	-0.476(30)	-0.347(17)	-0.513(89)
b_6 [GeV $^{-2}$]	0.165(158)	0.166(173)	-0.0397(1574)
b_7 [GeV $^{-2}$]	-1.10(11)	-0.915(26)	-1.27(8)
b_8 [GeV $^{-2}$]	-1.84(4)	-1.13(7)	0.192(30)
d_1 [GeV $^{-3}$]	0.0327(79)	0.0314(72)	0.0623(116)
d_2 [GeV $^{-3}$]	0.313(26)	0.269(42)	0.325(54)
d_3 [GeV $^{-3}$]	-0.0346(87)	-0.0199(81)	-0.0879(136)
d_4 [GeV $^{-3}$]	0.271(30)	0.230(24)	0.365(23)
d_5 [GeV $^{-3}$]	-0.350(28)	-0.302(50)	-0.326(66)
d_7 [GeV $^{-3}$]	-0.435(10)	-0.352(8)	-0.322(7)
d_8 [GeV $^{-3}$]	-0.566(24)	-0.456(30)	-0.459(33)
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	0.87	0.88	0.53

表 6: 格点 QCD 计算的强相互作用引起的核子质量破缺 $\delta m_N = m_p - m_n$ (MeV)。

	NPLQCD [246]	RBC-UKQCD [247]	QCDSF-UKQCD [248]	RM123 [249]	BMW [245]
δm_N	-2.26(57)(42)	-2.51(14)	-3.13(15)(16)(53)	-2.9(6)(2)	-2.28(25)(7)

够较精确地预言重子 sigma 项, 需要较好的限制低能常数的数值。除了通过拟合上述 3 个格点合作组的质量数据和实验值外, 还可以利用八重态重子质量的强相互作用同位旋破缺来进一步限制低能常数 (在手征微扰理论中, 计算强相互作用引起的质量同位旋破缺时, 无需引入新的未知低能常数)。近年来, 格点 QCD 在计算八重态重子质量的同位旋破缺方面也有较多的研究。我们选择物理点处强相互作用的质量破缺数值为 $\delta m_N = -2.50(50)$ MeV, $\delta m_\Sigma = -7.67(79)(105)$ MeV, $\delta m_\Xi = -5.87(76)(43)$ MeV。其中 δm_N 的取值涵盖了目前所有格点计算的结果 (表 6), δm_Σ 和 δm_Ξ 的数值来自高统计量的 BMW 格点模拟 [245]。

6.2 格点质量数据的拟合结果

这一小节, 利用八重态重子质量公式 (43) 拟合三种不同定标方法确定的 PACS-CS、LHPC 和 N-PLQCD 格点合作组的重子质量数据。这里需要指出, 我们利用次领头阶手征微扰理论描述介子八重态 π, K, η 的质量 M_ϕ (包括格点数据和实验值) [52], 相应的低能常数取自文献 [250], 并且在具体计算时考虑了介子质量的有限体积修正 [251]。

三种不同定标方法对应的最优拟合结果 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 和 19 个低能常数的数值列在表 5 中。如前所述, 在质量无关的定标方法下, 格点间距分别取为格点合作组确定的数值和重子手征微扰理论自洽计算的数值。研究发现, 自洽计算的格点间距非常接近格点合作组确定的数值: 对 PACS-CS 格点合作组, 两种方法的格点间距偏差为 2.5%; 对 LHPC 格点合作组, 其偏差为 4.1%; 对于 QCDSF-UKQCD 格点合作组, 其偏差为 2.1%。在质量相关的定标方法下, PACS-CS 合作组重子质量数据利用 $r_0^{\text{phys.}} = 0.465(12)$ fm [252]、格点 LHPC 合作组的数据利用 $r_1^{\text{phys.}} = 0.31174(20)$ fm [239]、格点 QCDSF-UKQCD 合作组的数据利用 $X_\pi^{\text{phys.}} = 0.4109$ GeV [45], 分别得到重子质量在自然单位制下的数值。从表中可以看出, 前两种方法对应的拟合 χ^2 相差较小, 而第三种方法得到的 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 比前两种方法要小一些。

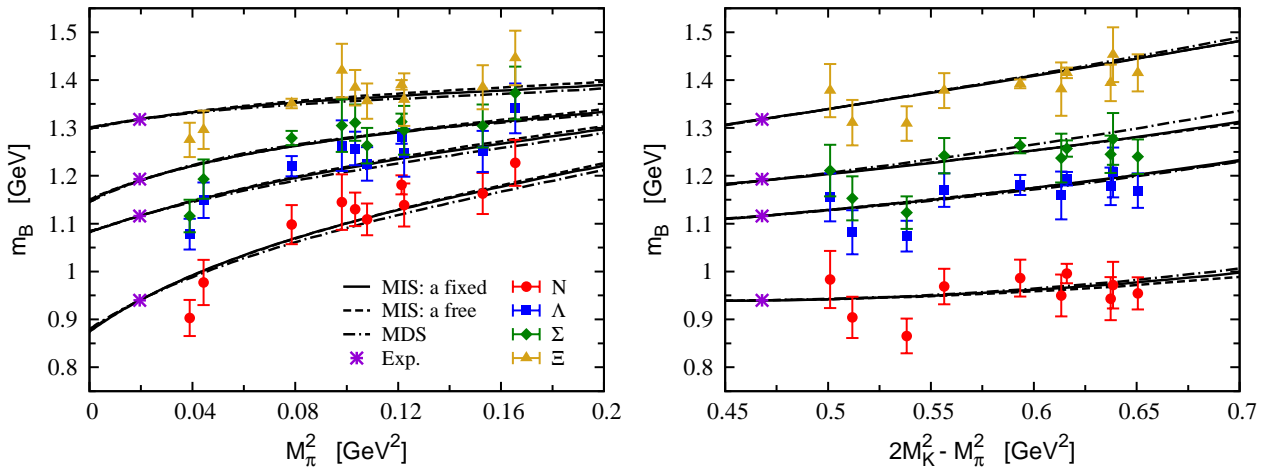


图 12: 八重态重子质量 m_B 随 M_π^2 和 $2M_K^2 - M_\pi^2$ 的演化。其中实线、虚线、点线分别对应表 5 的三种拟合。左图和右图中的奇异夸克质量和轻夸克质量分别固定为相应的物理值。格点数据来自 BMW 合作组 [39]。取自参考文献 [93]。

表 7: 基于次次次领头阶重子手征微扰理论预测的八重态重子的 $\sigma_{\pi B}$ 和 σ_{sB} 。取自参考文献 [93]。

	MIS		MDS
	a fixed	a free	
$\sigma_{\pi N}$ [MeV]	55(1)	54(1)	51(2)
$\sigma_{\pi \Lambda}$ [MeV]	32(1)	32(1)	30(2)
$\sigma_{\pi \Sigma}$ [MeV]	34(1)	33(1)	37(2)
$\sigma_{\pi \Xi}$ [MeV]	16(1)	18(2)	15(3)
σ_{sN} [MeV]	27(27)	23(19)	26(21)
$\sigma_{s\Lambda}$ [MeV]	185(24)	192(15)	168(14)
$\sigma_{s\Sigma}$ [MeV]	210(26)	216(16)	252(15)
$\sigma_{s\Xi}$ [MeV]	333(25)	346(15)	340(13)

利用得到的低能常数，图 12 展示了八重态重子质量作为 $M_\pi^2 (\propto m_l)$ 和 $2M_K^2 - M_\pi^2 (\propto m_s)$ 的函数变化。其中，右图中的轻夸克质量和左图中的奇异夸克质量固定为物理值。在图 12 中还给出了高统计量的 BMW 格点合作组数据 [39]。由于 BMW 数据并没有包含在拟合中，因此可以用来检验次次次领头阶下拟合结果的可靠性。从图中可以清晰地看出，不仅三种不同定标方法的拟合结果几乎相同，而且与 BMW 格点合作组数据在误差范围内一致。

6.3 重子 sigma 项的结果及讨论

接下来，利用 Feynman-Hellmann 定理和拟合得到的低能常数，在表 7 中列出了计算得到八重态重子的 sigma 项。从表中看出，三种不同定标方法得到的 sigma 项是彼此自洽的，说明格点的定标方法对 sigma 项影响不大。因此，我们将第一种质量无关的定标方法得到的 sigma 项作为中心值，与其余两种定标方法结果的差别作为系统误差，列在表 7 第二列中的第二个括号内。可以看出， $\sigma_{\pi N}$ 的不确定度主要来自于格点定标方法的差别，而 σ_{sN} 的统计误差比系统误差要大很多。为了降低其统计误差，需要进一步提高格点 QCD 模拟数据的精度，尤其是在不同奇异夸克质量下的质量数据。这里需要指出，在 sigma 项计算中，我们还研究了虚的十重态重子的效应和其它低能常数 D , F , F_ϕ 以及重整化标度 μ 的影响，发现它们的贡献和影响可以忽略。另外，连续延拓的效应对八重态重子 sigma 的影响也是可以忽略的 [92]。

以上研究预言的 π 介子-核子 sigma 项， $\sigma_{\pi N} = 55(1)(4)$ MeV，和最新的 πN 散射研究的结果 ($\sigma_{\pi N} = 59(7)$ MeV) [227] 以及系统研究 $N_f = 2 + 1$ 格点核子数据所得到的结果 ($\sigma_{\pi N} = 52(3)(8)$ MeV) [207] 是一致的，但比文献 [242] 所得到的值 ($\sigma_{\pi N} = 39^{+2}_-1$ MeV) 稍大一些。对于核子的奇异 sigma 项，图 13 展示了文献 [93] 的结果和近期其它格点 QCD 和手征微扰理论计算结果的比较。从图中可以看出，文献 [93] 的结果和绝大多数的最新格点计算和次次领头阶手征微扰理论的计算结果是一致的。需要注意的是，利用 partial summation 重子手征微扰理论计算到次次次领头阶情况下得到的 σ_{sN} 比文献 [93] 的结果以及大部分的格点计算结果偏大。

由于重子手征微扰理论在预言八重态重子 sigma 项过程中起着关键性的作用，因此微扰展开的截断效应是 sigma 项不确定度较为重要的来源。在 u 、 d 、 s 三味空间中，微扰展开参数为 $M_K/\Lambda_{\text{ChPT}} \approx 0.5$ ，因此有必要研究不同手征展开阶数的收敛性问题。由于之前的相关研究都是局限在次次领头阶或者次次次领头阶情况下，不能进行手征截断效应的研究。文献 [93] 利用次次领头阶的八重态重子质量公式拟合了 PACS-CS、LHPC、QCDSF-UKQCD 格点合作组的数据，并允许 F_ϕ 和重整化标度 μ 变动，但所得到的拟合 $\chi^2/\text{d.o.f.}$ 均大于 1。这表明手征展开的高阶修正是必要的。另外，采用收敛速度较快的 FRR 方法来研究同样的格点数据，发现得到的结果和 EOMS 方法在拟合时允许 F_ϕ 从手征极限值 87.1 MeV 变动到 SU(3) 平均值 $F_\phi = 1.17F_\pi$ ($F_\pi = 92.1$ MeV [256]) 情况下得到的结果大体一致。

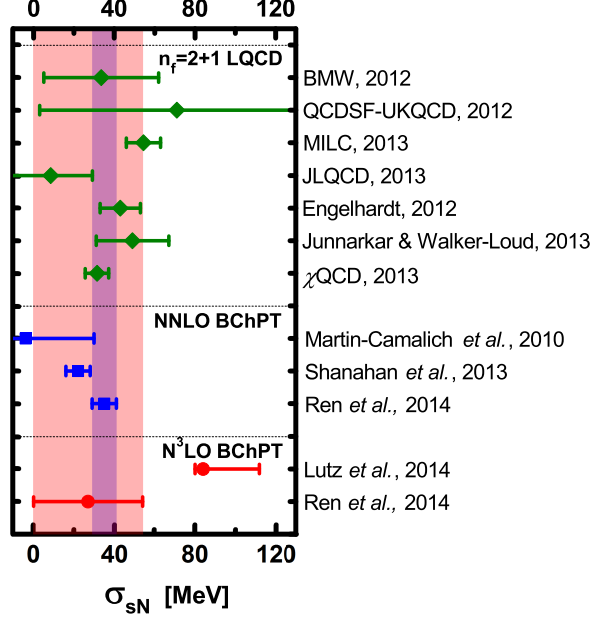


图 13: 不同方法预言的 σ_{sN} 。蓝色带状区域和红色带状区域分别是 EOM-S 协变重子手征微扰理论的 NNLO 和 N^3 LO 的计算结果 (Ren *et al.* [93])。图中的其它数据取自下列参考文献: MILC(2009) [253]、BMW(2012) [47]、QCDSF-UKQCD [236]、MILC(2013) [254]、JLQCD(2013) [233]、Engelhardt [232]、Junnarkar & Walker-Loud [239]、 χ QCD(2013) [234]、Young and Thomas [69]、Martin-Camalich *et al.* [82]、Shanahan *et al.* [237]、Semke & Lutz [255]。取自参考文献 [93]。

图 13 也给出了次次领头阶下得到的奇异 sigma 项，其不确定度比次次次领头阶情况下的不确定小很多。

7 总结与展望

本文系统介绍了利用协变手征微扰理论研究八重态重子质量的最近进展。在 u 、 d 、 s 三味空间中，利用满足所有对称性和圈图解析性质的 EOMS 协变手征微扰理论，计算重子八重态质量到次次领头阶。结合最新格点量子色动力学质量计算数据，系统研究了八重态重子的手征延拓、格点有限体积修正和有限格点间距的离散效应。研究表明 EOMS 协变手征微扰理论具有较好的收敛性质，为协变手征微扰理论的进一步应用奠定了基础。验证了八重态重子质量的格点计算数据的自恰性，为格点量子色动力学从第一原理出发理解重子质量的起源提供了必要的理论支持。通过显式包含虚的十重态重子的贡献，分析最新的格点量子色动力学模拟的重子质量数据，研究了其对八重态重子质量的手征延拓和格点有限体积修正的影响。发现虚的十重态重子对八重态重子质量的轻夸克质量依赖影响很小，但可以改善对格点有限体积修正的描述。通过拟合格点量子色动力学重子质量数据，发现有限格点间距的效应较小，在格点间距达到 0.15 fm 时，其效应也只占八重态重子质量的百分之一左右。通过系统研究当前高统计性的 PACS-CS、LHPC 和 QCDSF-UKQCD 格点合作组数据，考虑格点定标效应，考虑手征展开的截断效应对 σ 项的影响以及自洽包含强相互作用引起的同位旋破缺效应，精确预言了八重态重子的 σ 项。

本文中，无论是格点 QCD 计算重子质量还是重子手征微扰理论的相关研究，都是基于 u 、 d 夸克质量相同，即同位旋对称性守恒的情况下进行的。随着计算技术的改进和计算能力的提高，格点 QCD 模拟已经开始考虑同位旋破缺效应包括强相互作用引起的同位旋破缺 $m_u \neq m_d$ 和电磁相互作用引起的质量破缺 [257, 258]。在格点上将 QCD + QED 结合起来计算核子和重子的质量破缺已经有了较多的研究 [245, 246, 247, 248, 249, 259, 260, 261, 262]。研究重子质量的同位旋破缺，尤其是质子、中子的质量的同位旋破缺，对 β 衰变和新物理都有一定的指导意义 [263]。近期，Davoudi 和 Savage 研究了有限体积内电磁修正对介子、重子及原子核质量的贡献 [264]。接下来，我们计划在协变的重子手征微扰理论框架，构建显式包含虚光子的手征有效拉氏量，计算电磁相互作用对八重态重子质量的贡献。

如本文所述，截止目前，利用格点 QCD 计算重子质量取得了很大的成功，由连续延拓、有限体积修正所引起的系统误差也得到了很好的控制。目前格点模拟更多关注重子的激发态。有若干个合作组采用不同的格点间距、不同的夸克味空间、不同的提取激发态的算符和不同的拟合方法，已经开始了这方面的研究 [265, 266, 267, 268]。在这些计算中，目前还有待解决，并受到极大关注的是核子的激发态 Roper。格点 QCD 已经对其质量进行了较多的计算 [269, 270, 271, 272, 273]。但文献 [273] 指出，由于激发态提取的困难，利用 Sequential Empirical Bayesian (SEB) 方法提取出的 Roper 质量经过手征延拓后，和实验值较为符合。在利用重子手征微扰理论处理 Roper 质量方面，Borasoy 等人已经利用红外手征微扰理论研究了 Roper 质量随着轻夸克质量的依赖关系 [274]。接下来，我们计划利用协变的重子手征微扰理论，考察虚的核子、 $\Delta(1232)$ 粒子对 Roper 质量的贡献。并结合格点 QCD 数据，确定理论中的低能常数，研究 Roper 质量随着轻夸克质量的依赖关系。

需要指出的是，由于篇幅所限，本文主要介绍了基于协变手征微扰理论，结合格点 QCD 模拟数据，对基态八重态重子质量的研究，并没有详细介绍对基态十重态重子质量的研究，相关进展可以参考文献 [91]。近年来，格点 QCD 对所谓的 X、Y、Z 奇异强子态也开展了初步的研究，如 $D_{s0}^*(2317)$ [275]， $X(3872)$ [276]， $Z_c(3900)$ [277, 278] 等。基于手征微扰理论及其么正化扩展的相关研究对格点 QCD 计算也有重要的参考意义 [279, 280, 281]，由于篇幅所限，本文不再赘述。

致谢

本文涉及的部分工作受到北京航空航天大学博士生创新基金，中央高校基础科研业务费，国家自然科学基金 (项目号 11005007, 11035007, 11335002 和 11175002)，和教育部新世纪优秀人才支持计划 (项目号 NCET-10-0029) 的资助。

参考文献

- [1] J.J. Thomson. Cathode rays. *Phil.Mag.*, 44:293–316, 1897.
- [2] E. Rutherford. The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom. *Phil.Mag.*, 21:669–688, 1911.
- [3] J. Chadwick. Possible Existence of a Neutron. *Nature*, 129:312, 1932.
- [4] C.D. Anderson. The Positive Electron. *Phys.Rev.*, 43:491–494, 1933.
- [5] Carl D. Anderson and Seth H. Neddermeyer. Cloud Chamber Observations of Cosmic Rays at 4300 Meters Elevation and Near Sea-Level. *Phys.Rev.*, 50:263–271, 1936.
- [6] J.C. Street and E.C. Stevenson. New Evidence for the Existence of a Particle of Mass Intermediate Between the Proton and Electron. *Phys.Rev.*, 52:1003–1004, 1937.
- [7] C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini, and C.F. Powell. PROCESSES INVOLVING CHARGED MESONS. *Nature*, 159:694–697, 1947.
- [8] R.W. Mcallister and R. Hofstadter. Elastic Scattering of 188-MeV Electrons From the Proton and the α Particle. *Phys.Rev.*, 102:851–856, 1956.
- [9] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys.Lett.*, 8:214–215, 1964.
- [10] G. Zweig. An $su(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. version 1. 1964.
- [11] G. Zweig. An $su(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. version 2. pages 22–101, 1964.
- [12] V.E. Barnes, P.L. Connolly, D.J. Crennell, B.B. Culwick, W.C. Delaney, et al. Observation of a Hyperon with Strangeness -3. *Phys.Rev.Lett.*, 12:204–206, 1964.
- [13] J.E. Augustin et al. Discovery of a Narrow Resonance in $e^+ e^-$ Annihilation. *Phys.Rev.Lett.*, 33:1406–1408, 1974.
- [14] J.J. Aubert et al. Experimental Observation of a Heavy Particle J. *Phys.Rev.Lett.*, 33:1404–1406, 1974.
- [15] S.W. Herb, D.C. Hom, L.M. Lederman, J.C. Sens, H.D. Snyder, et al. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5-GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions. *Phys.Rev.Lett.*, 39:252–255, 1977.
- [16] F. Abe et al. Observation of top quark production in $\bar{p}p$ collisions. *Phys.Rev.Lett.*, 74:2626–2631, 1995.
- [17] S. Abachi et al. Observation of the top quark. *Phys.Rev.Lett.*, 74:2632–2637, 1995.
- [18] K.A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin.Phys.*, C38:090001, 2014.
- [19] Frank Wilczek. Origins of Mass. *Central Eur.J.Phys.*, 10:1021–1037, 2012.
- [20] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys.Rev.Lett.*, 13:321–323, 1964.

- [21] Peter W. Higgs. Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons. *Phys.Rev.*, 145:1156–1163, 1966.
- [22] G.S. Guralnik, C.R. Hagen, and T.W.B. Kibble. Global Conservation Laws and Massless Particles. *Phys.Rev.Lett.*, 13:585–587, 1964.
- [23] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:1–29, 2012.
- [24] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:30–61, 2012.
- [25] Q. Wang. The origin of mass revisited. 38(10):0, 2009.
- [26] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys.Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [27] H. Hamber and G. Parisi. Numerical Estimates of Hadronic Masses in a Pure SU(3) Gauge Theory. *Phys.Rev.Lett.*, 47:1792, 1981.
- [28] Don Weingarten. Monte Carlo Evaluation of Hadron Masses in Lattice Gauge Theories with Fermions. *Phys.Lett.*, B109:57, 1982.
- [29] Simone Cabasino et al. Beta = 6.0 quenched Wilson fermions. *Phys.Lett.*, B258:195–201, 1991.
- [30] Y. Iwasaki et al. Hadron masses and decay constants with Wilson quarks at Beta = 5.85 and Beta = 6. *Phys.Rev.*, D53:6443–6464, 1996.
- [31] F. Butler, H. Chen, J. Sexton, A. Vaccarino, and D. Weingarten. Hadron masses from the valence approximation to lattice QCD. *Nucl.Phys.*, B430:179–228, 1994.
- [32] Tanmoy Bhattacharya, Rajan Gupta, Gregory Kilcup, and Stephen R. Sharpe. Hadron spectrum with Wilson fermions. *Phys.Rev.*, D53:6486–6508, 1996.
- [33] Claude W. Bernard et al. Light hadron spectrum: MILC results with the Kogut-Susskind and Wilson actions. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 60A:3–13, 1998.
- [34] S. Aoki et al. Quenched light hadron spectrum. *Phys.Rev.Lett.*, 84:238–241, 2000.
- [35] T. Yoshie. Light hadron spectrum from quenched lattice QCD: Results from the CP-PACS. *Prog.Theor.Phys.*, 105:37–75, 2001.
- [36] A. Ali Khan et al. Light hadron spectroscopy with two flavors of dynamical quarks on the lattice. *Phys.Rev.*, D65:054505, 2002.
- [37] Sasa Prelovsek, C. Dawson, T. Izubuchi, K. Orginos, and A. Soni. Scalar meson in dynamical and partially quenched two-flavor QCD: Lattice results and chiral loops. *Phys.Rev.*, D70:094503, 2004.
- [38] C. Alexandrou et al. Low-lying baryon spectrum with two dynamical twisted mass fermions. *Phys.Rev.*, D80:114503, 2009.
- [39] S. Durr, Z. Fodor, J. Frison, C. Hoelbling, R. Hoffmann, et al. Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses. *Science*, 322:1224–1227, 2008.
- [40] S. Aoki et al. 2+1 Flavor Lattice QCD toward the Physical Point. *Phys.Rev.*, D79:034503, 2009.

- [41] S. Aoki et al. Physical Point Simulation in 2+1 Flavor Lattice QCD. *Phys.Rev.*, D81:074503, 2010.
- [42] A. Walker-Loud, H.-W. Lin, D.G. Richards, R.G. Edwards, M. Engelhardt, et al. Light hadron spectroscopy using domain wall valence quarks on an Asqtad sea. *Phys.Rev.*, D79:054502, 2009.
- [43] Huey-Wen Lin et al. First results from 2+1 dynamical quark flavors on an anisotropic lattice: Light-hadron spectroscopy and setting the strange-quark mass. *Phys.Rev.*, D79:034502, 2009.
- [44] W. Bietenholz, V. Bornyakov, N. Cundy, M. Gockeler, R. Horsley, et al. Tuning the strange quark mass in lattice simulations. *Phys.Lett.*, B690:436–441, 2010.
- [45] W. Bietenholz, V. Bornyakov, M. Gockeler, R. Horsley, W.G. Lockhart, et al. Flavour blindness and patterns of flavour symmetry breaking in lattice simulations of up, down and strange quarks. *Phys.Rev.*, D84:054509, 2011.
- [46] S.R. Beane, E. Chang, W. Detmold, H.W. Lin, T.C. Luu, et al. High Statistics Analysis using Anisotropic Clover Lattices: (IV) Volume Dependence of Light Hadron Masses. *Phys.Rev.*, D84:014507, 2011.
- [47] S. Durr, Z. Fodor, T. Hemmert, C. Hoelbling, J. Frison, et al. Sigma term and strangeness content of octet baryons. *Phys.Rev.*, D85:014509, 2012.
- [48] S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling, S.D. Katz, S. Krieg, et al. Lattice QCD at the physical point: Simulation and analysis details. *JHEP*, 1108:148, 2011.
- [49] A. Bazavov et al. Lattice QCD ensembles with four flavors of highly improved staggered quarks. *Phys.Rev.*, D87(5):054505, 2013.
- [50] Steven Weinberg. Phenomenological Lagrangians. *Physica*, A96:327, 1979.
- [51] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral Perturbation Theory to One Loop. *Annals Phys.*, 158:142, 1984.
- [52] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark. *Nucl.Phys.*, B250:465, 1985.
- [53] J. Gasser, M.E. Sainio, and A. Svarc. Nucleons with Chiral Loops. *Nucl.Phys.*, B307:779, 1988.
- [54] H. Leutwyler. Principles of chiral perturbation theory. 1994.
- [55] V. Bernard, Norbert Kaiser, and Ulf-G. Meissner. Chiral dynamics in nucleons and nuclei. *Int.J.Mod.Phys.*, E4:193–346, 1995.
- [56] A. Pich. Chiral perturbation theory. *Rept.Prog.Phys.*, 58:563–610, 1995.
- [57] G. Ecker. Chiral perturbation theory. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 35:1–80, 1995.
- [58] Antonio Pich. Effective field theory: Course. pages 949–1049, 1998.
- [59] Veronique Bernard and Ulf-G. Meissner. Chiral perturbation theory. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 57:33–60, 2007.
- [60] Veronique Bernard. Chiral Perturbation Theory and Baryon Properties. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 60:82–160, 2008.

- [61] S. Scherer and M. R. Schindler. *A Primer for Chiral Perturbation Theory*. Springer, Heidelberg Germany, 2012.
- [62] Johan Bijnens. Chiral perturbation theory beyond one loop. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 58:521–586, 2007.
- [63] Elizabeth Ellen Jenkins and Aneesh V. Manohar. Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion Lagrangian. *Phys.Lett.*, B255:558–562, 1991.
- [64] Thomas Becher and H. Leutwyler. Baryon chiral perturbation theory in manifestly Lorentz invariant form. *Eur.Phys.J.*, C9:643–671, 1999.
- [65] J. Gegelia and G. Japaridze. Matching heavy particle approach to relativistic theory. *Phys.Rev.*, D60:114038, 1999.
- [66] T. Fuchs, J. Gegelia, G. Japaridze, and S. Scherer. Renormalization of relativistic baryon chiral perturbation theory and power counting. *Phys.Rev.*, D68:056005, 2003.
- [67] Ross Daniel Young, Derek Bruce Leinweber, and Anthony William Thomas. Convergence of chiral effective field theory. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 50:399–417, 2003.
- [68] Derek Bruce Leinweber, Anthony William Thomas, and Ross Daniel Young. Physical nucleon properties from lattice QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 92:242002, 2004.
- [69] R.D. Young and A.W. Thomas. Octet baryon masses and sigma terms from an SU(3) chiral extrapolation. *Phys.Rev.*, D81:014503, 2010.
- [70] Veronique Bernard, Thomas R. Hemmert, and Ulf-G. Meissner. Cutoff schemes in chiral perturbation theory and the quark mass expansion of the nucleon mass. *Nucl.Phys.*, A732:149–170, 2004.
- [71] Matthias Lutz. Effective chiral theory of nucleon-nucleon scattering. *Nucl.Phys.*, A677:241–312, 2000.
- [72] M.F.M. Lutz and E.E. Kolomeitsev. Relativistic chiral SU(3) symmetry, large N(c) sum rules and meson baryon scattering. *Nucl.Phys.*, A700:193–308, 2002.
- [73] Elizabeth Ellen Jenkins. Baryon masses in chiral perturbation theory. *Nucl.Phys.*, B368:190–203, 1992.
- [74] Veronique Bernard, Norbert Kaiser, and Ulf G. Meissner. Critical analysis of baryon masses and sigma terms in heavy baryon chiral perturbation theory. *Z.Phys.*, C60:111–120, 1993.
- [75] M.K. Banerjee and J. Milana. Baryon mass splittings in chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D52:6451–6460, 1995.
- [76] B. Borasoy and Ulf-G. Meissner. Chiral expansion of baryon masses and sigma terms. *Annals Phys.*, 254:192–232, 1997.
- [77] Andre Walker-Loud. Octet baryon masses in partially quenched chiral perturbation theory. *Nucl.Phys.*, A747:476–507, 2005.
- [78] P.J. Ellis and K. Torikoshi. Baryon masses in chiral perturbation theory with infrared regularization. *Phys.Rev.*, C61:015205, 2000.

- [79] Matthias Frink and Ulf-G. Meissner. Chiral extrapolations of baryon masses for unquenched three flavor lattice simulations. *JHEP*, 0407:028, 2004.
- [80] Matthias Frink, Ulf-G. Meissner, and Ilka Scheller. Baryon masses, chiral extrapolations, and all that. *Eur.Phys.J.*, A24:395–409, 2005.
- [81] B.C. Lehnhart, J. Gegelia, and S. Scherer. Baryon masses and nucleon sigma terms in manifestly Lorentz-invariant baryon chiral perturbation theory. *J.Phys.*, G31:89–104, 2005.
- [82] J. Martin Camalich, L. S. Geng, and M.J. Vicente Vacas. The lowest-lying baryon masses in covariant SU(3)-flavor chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D82:074504, 2010.
- [83] L. S. Geng, Xiu-Lei Ren, J. Martin-Camalich, and W. Weise. Finite-volume effects on octet-baryon masses in covariant baryon chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D84:074024, 2011.
- [84] A. Semke and M.F.M. Lutz. Baryon self energies in the chiral loop expansion. *Nucl.Phys.*, A778:153–180, 2006.
- [85] A. Semke and M.F.M. Lutz. On the possibility of a discontinuous quark-mass dependence of baryon octet and decuplet masses. *Nucl.Phys.*, A789:251–259, 2007.
- [86] A. Semke and M.F.M. Lutz. On the quark-mass dependence of the baryon ground-state masses. *Phys.Rev.*, D85:034001, 2012.
- [87] Peter C. Bruns, Ludwig Greil, and Andreas Schafer. Chiral extrapolation of baryon mass ratios. 2012.
- [88] M.F.M. Lutz and A. Semke. On the consistency of recent QCD lattice data of the baryon ground-state masses. *Phys.Rev.*, D86:091502, 2012.
- [89] X.-L. Ren, L. S. Geng, J. Martin Camalich, J. Meng, and H. Toki. Octet baryon masses in next-to-next-to-next-to-leading order covariant baryon chiral perturbation theory. *J. High Energy Phys.*, 12:073, 2012.
- [90] Xiu-Lei Ren, Li Sheng Geng, Jie Meng, and Hiroshi Toki. Virtual decuplet effects on octet baryon masses in covariant baryon chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D87:074001, 2013.
- [91] Xiu-Lei Ren, Li-Sheng Geng, and Jie Meng. Decuplet baryon masses in covariant baryon chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D89(5):054034, 2014.
- [92] Xiu-Lei. Ren, Li-Sheng Geng, and Jie Meng. Baryon chiral perturbation theory with Wilson fermions up to $\mathcal{O}(a^2)$ and discretization effects of latest $n_f = 2 + 1$ LQCD octet baryon masses. *Eur.Phys.J.*, C74(2):2754, 2014.
- [93] Xiu-Lei Ren, Li-Sheng Geng, and Jie Meng. An accurate determination of octet baryon sigma terms. 2014.
- [94] A. Ali Khan et al. The Nucleon mass in $N(f) = 2$ lattice QCD: Finite size effects from chiral perturbation theory. *Nucl.Phys.*, B689:175–194, 2004.
- [95] M. Procura, B.U. Musch, T. Wollenweber, T.R. Hemmert, and W. Weise. Nucleon mass: From lattice QCD to the chiral limit. *Phys.Rev.*, D73:114510, 2006.

- [96] K. Symanzik. Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 1. Principles and ϕ^4 Theory. *Nucl.Phys.*, B226:187, 1983.
- [97] K. Symanzik. Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 2. $O(N)$ Nonlinear Sigma Model in Perturbation Theory. *Nucl.Phys.*, B226:205, 1983.
- [98] B. Sheikholeslami and R. Wohlert. Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions. *Nucl.Phys.*, B259:572, 1985.
- [99] Martin Luscher, Stefan Sint, Rainer Sommer, and Peter Weisz. Chiral symmetry and $O(a)$ improvement in lattice QCD. *Nucl.Phys.*, B478:365–400, 1996.
- [100] Gautam Rupak and Noam Shoresh. Chiral perturbation theory for the Wilson lattice action. *Phys.Rev.*, D66:054503, 2002.
- [101] Oliver Bar, Gautam Rupak, and Noam Shoresh. Simulations with different lattice Dirac operators for valence and sea quarks. *Phys.Rev.*, D67:114505, 2003.
- [102] Sinya Aoki. Chiral perturbation theory with Wilson type fermions including a^2 effects: $N(f) = 2$ degenerate case. *Phys.Rev.*, D68:054508, 2003.
- [103] Oliver Bar, Gautam Rupak, and Noam Shoresh. Chiral perturbation theory at $O(a^2)$ for lattice QCD. *Phys.Rev.*, D70:034508, 2004.
- [104] Silas R. Beane and Martin J. Savage. Nucleon properties at finite lattice spacing in chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D68:114502, 2003.
- [105] Brian C. Tiburzi. Baryon masses at $O(a^2)$ in chiral perturbation theory. *Nucl.Phys.*, A761:232–258, 2005.
- [106] Hovhannes R. Grigoryan and Anthony William Thomas. Vector meson mass corrections at $O(a^2)$ in PQChPT with Wilson and Ginsparg-Wilson quarks. *Phys.Lett.*, B632:657–662, 2006.
- [107] Daniel Arndt and Brian C. Tiburzi. Hadronic electromagnetic properties at finite lattice spacing. *Phys.Rev.*, D69:114503, 2004.
- [108] Paulo F. Bedaque, Michael I. Buchoff, and Andre Walker-Loud. Effective Field Theory for the Anisotropic Wilson Lattice Action. *Phys.Rev.*, D77:074501, 2008.
- [109] C. Aubin and C. Bernard. Pion and kaon masses in staggered chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D68:034014, 2003.
- [110] C. Aubin and C. Bernard. Pseudoscalar decay constants in staggered chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D68:074011, 2003.
- [111] Stephen R. Sharpe and Ruth S. Van de Water. Staggered chiral perturbation theory at next-to-leading order. *Phys.Rev.*, D71:114505, 2005.
- [112] Brian C. Tiburzi. Baryons with Ginsparg-Wilson quarks in a staggered sea. *Phys.Rev.*, D72:094501, 2005.
- [113] C. Aubin and C. Bernard. Staggered chiral perturbation theory with heavy-light mesons. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 140:491–493, 2005.

- [114] C. Aubin and C. Bernard. Staggered chiral perturbation theory for heavy-light mesons. *Phys.Rev.*, D73:014515, 2006.
- [115] C. Aubin and C. Bernard. Heavy-light semileptonic decays in staggered chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D76:014002, 2007.
- [116] Claude Bernard and Javad Komijani. Chiral Perturbation Theory for All-Staggered Heavy-Light Mesons. *Phys.Rev.*, D88:094017, 2013.
- [117] Luigi Scorzato. Pion mass splitting and phase structure in twisted mass QCD. *Eur.Phys.J.*, C37:445–455, 2004.
- [118] Stephen R. Sharpe and Jackson M.S. Wu. The Phase diagram of twisted mass lattice QCD. *Phys.Rev.*, D70:094029, 2004.
- [119] Stephen R. Sharpe and Jackson M.S. Wu. Twisted mass chiral perturbation theory at next-to-leading order. *Phys.Rev.*, D71:074501, 2005.
- [120] Andre Walker-Loud and Jackson M.S. Wu. Nucleon and Delta masses in twisted mass chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D72:014506, 2005.
- [121] Stephen R. Sharpe. Observations on discretization errors in twisted-mass lattice QCD. *Phys.Rev.*, D72:074510, 2005.
- [122] Michael I. Buchoff, Jiunn-Wei Chen, and Andre Walker-Loud. π - π Scattering in Twisted Mass Chiral Perturbation Theory. *Phys.Rev.*, D79:074503, 2009.
- [123] Gernot Munster and Tobias Sudmann. Twisted mass chiral perturbation theory for 2+1+1 quark flavours. *JHEP*, 1104:116, 2011.
- [124] P.H. Damgaard, K. Splittorff, and J.J.M. Verbaarschot. Microscopic Spectrum of the Wilson Dirac Operator. *Phys.Rev.Lett.*, 105:162002, 2010.
- [125] G. Akemann, P.H. Damgaard, K. Splittorff, and J.J.M. Verbaarschot. Spectrum of the Wilson Dirac Operator at Finite Lattice Spacings. *Phys.Rev.*, D83:085014, 2011.
- [126] Maxwell T. Hansen and Stephen R. Sharpe. Constraint on the Low Energy Constants of Wilson Chiral Perturbation Theory. *Phys.Rev.*, D85:014503, 2012.
- [127] Maxwell T. Hansen and Stephen R. Sharpe. Determining low-energy constants in partially quenched Wilson chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, D85:054504, 2012.
- [128] Gregorio Herdoiza, Karl Jansen, Chris Michael, Konstantin Ottnad, and Carsten Urbach. Determination of Low-Energy Constants of Wilson Chiral Perturbation Theory. *JHEP*, 1305:038, 2013.
- [129] S.J. Puglia, M.J. Ramsey-Musolf, and Shi-Lin Zhu. Octet baryon charge radii, chiral symmetry and decuplet intermediate states. *Phys.Rev.*, D63:034014, 2001.
- [130] Elizabeth Ellen Jenkins and Aneesh V. Manohar. Chiral corrections to the baryon axial currents. *Phys.Lett.*, B259:353–358, 1991.
- [131] M.A. Luty and 1 White, Martin J. Decouplet contributions to hyperon axial vector form-factors. *Phys.Lett.*, B319:261–268, 1993.

- [132] L.S. Geng, J. Martin Camalich, and M.J. Vicente Vacas. Leading-order decuplet contributions to the baryon magnetic moments in Chiral Perturbation Theory. *Phys.Lett.*, B676:63–68, 2009.
- [133] J.M. Alarcon, L.S. Geng, J. Martin Camalich, and J.A. Oller. The strangeness content of the nucleon from effective field theory and phenomenology. *Phys.Lett.*, B730:342–346, 2014.
- [134] I. Montvay and G. Munster. *Quantum fields on a lattice*, volume 2264 of *Cambridge monographs on mathematical physics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994.
- [135] Rajan Gupta. Introduction to lattice QCD: Course. pages 83–219, 1997.
- [136] Massimo Di Pierro. From Monte Carlo integration to lattice quantum chromodynamics: An Introduction. 2000.
- [137] J. Smit. Introduction to quantum fields on a lattice: A robust mate. *Cambridge Lect.Notes Phys.*, 15:1–271, 2002.
- [138] H.J. Rothe. Lattice gauge theories: An Introduction. *World Sci.Lect.Notes Phys.*, 43:1–381, 1992.
- [139] Thomas DeGrand and Carleton E. Detar. *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2006.
- [140] C. Gattringer and C. B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice - An Introductory Presentation*. Springer, Heidelberg Germany, 2010.
- [141] Zoltan Fodor and Christian Hoelbling. Light Hadron Masses from Lattice QCD. *Rev.Mod.Phys.*, 84:449, 2012.
- [142] Paul A.M. Dirac. The Lagrangian in quantum mechanics. *Phys.Z.Sowjetunion*, 3:64–72, 1933.
- [143] R.P. Feynman. A Relativistic cutoff for classical electrodynamics. *Phys.Rev.*, 74:939–946, 1948.
- [144] R.P. Feynman. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev.Mod.Phys.*, 20:367–387, 1948.
- [145] R.P. Feynman. Space - time approach to quantum electrodynamics. *Phys.Rev.*, 76:769–789, 1949.
- [146] Richard P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill Companies; First Edition edition, 1965.
- [147] John B. Kogut and Leonard Susskind. Hamiltonian Formulation of Wilson’s Lattice Gauge Theories. *Phys.Rev.*, D11:395–408, 1975.
- [148] Tom Banks, Leonard Susskind, and John B. Kogut. Strong Coupling Calculations of Lattice Gauge Theories: (1+1)-Dimensional Exercises. *Phys.Rev.*, D13:1043, 1976.
- [149] Leonard Susskind. Lattice Fermions. *Phys.Rev.*, D16:3031–3039, 1977.
- [150] K. G. Wilson. *Proceedings of the First Half of the 1975 International School of Subnuclear Physics, Erice, Sicily, edited by A. Zichichi (Plenum Press, New York)*, page 69, 1975.
- [151] Roberto Frezzotti, Pietro Antonio Grassi, Stefan Sint, and Peter Weisz. A Local formulation of lattice QCD without unphysical fermion zero modes. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 83:941–946, 2000.
- [152] Roberto Frezzotti, Pietro Antonio Grassi, Stefan Sint, and Peter Weisz. Lattice QCD with a chirally twisted mass term. *JHEP*, 0108:058, 2001.

- [153] Paul H. Ginsparg and Kenneth G. Wilson. A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice. *Phys.Rev.*, D25:2649, 1982.
- [154] Rajamani Narayanan and Herbert Neuberger. A Construction of lattice chiral gauge theories. *Nucl.Phys.*, B443:305–385, 1995.
- [155] Peter Hasenfratz, Victor Laliena, and Ferenc Niedermayer. The Index theorem in QCD with a finite cutoff. *Phys.Lett.*, B427:125–131, 1998.
- [156] Martin Luscher. Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation. *Phys.Lett.*, B428:342–345, 1998.
- [157] A. Bazavov et al. Leptonic decay-constant ratio f_{K^+}/f_{π^+} from lattice QCD with physical light quarks. *Phys.Rev.Lett.*, 110:172003, 2013.
- [158] Rainer Sommer. Scale setting in lattice QCD. 2014.
- [159] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys.Lett.*, B47:365–368, 1973.
- [160] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys.Rev.Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [161] Steven Weinberg. Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions. *Phys.Rev.Lett.*, 31:494–497, 1973.
- [162] Andreas S. Kronfeld and Chris Quigg. Resource Letter: Quantum Chromodynamics. *Am.J.Phys.*, 78:1081–1116, 2010.
- [163] Guido Altarelli. Partons in Quantum Chromodynamics. *Phys.Rept.*, 81:1, 1982.
- [164] William J. Marciano and Heinz Pagels. Quantum Chromodynamics: A Review. *Phys.Rept.*, 36:137, 1978.
- [165] Gerard 't Hooft and M.J.G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl.Phys.*, B44:189–213, 1972.
- [166] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys.Rev.Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [167] C.P. Burgess. Goldstone and pseudoGoldstone bosons in nuclear, particle and condensed matter physics. *Phys.Rept.*, 330:193–261, 2000.
- [168] Gerhard Ecker. Effective field theories. 2005.
- [169] H. Georgi. Effective field theory. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 43:209–252, 1993.
- [170] David B. Kaplan. Effective field theories. 1995.
- [171] Aneesh V. Manohar. Effective field theories. 1996.
- [172] Joseph Polchinski. Effective field theory and the Fermi surface. 1992.
- [173] Emmy Noether. Invariant Variation Problems. *Gott.Nachr.*, 1918:235–257, 1918.
- [174] Murray Gell-Mann and M Levy. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, 16:705, 1960.

- [175] Murray Gell-Mann, R.J. Oakes, and B. Renner. Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$. *Phys.Rev.*, 175:2195–2199, 1968.
- [176] S.L. Glashow and Steven Weinberg. Breaking chiral symmetry. *Phys.Rev.Lett.*, 20:224–227, 1968.
- [177] Heinz Pagels. Departures from Chiral Symmetry: A Review. *Phys.Rept.*, 16:219, 1975.
- [178] Johan Bijnens. Status of Chiral Meson Physics. 2014.
- [179] Howard Georgi. An Effective Field Theory for Heavy Quarks at Low-energies. *Phys.Lett.*, B240:447–450, 1990.
- [180] Michael E. Luke and Aneesh V. Manohar. Reparametrization invariance constraints on heavy particle effective field theories. *Phys.Lett.*, B286:348–354, 1992.
- [181] G. Ecker and M. Mojzis. Low-energy expansion of the pion - nucleon Lagrangian. *Phys.Lett.*, B365:312–318, 1996.
- [182] G. Ecker and M. Mojzis. Wave function renormalization in heavy baryon chiral perturbation theory. *Phys.Lett.*, B410:266–274, 1997.
- [183] Thomas Becher. Lorentz invariant baryon CHPT. pages 66–77, 2000.
- [184] N. Kaiser. Spectral functions of isoscalar scalar and isovector electromagnetic form-factors of the nucleon at two loop order. *Phys.Rev.*, C68:025202, 2003.
- [185] Hua-Bin Tang. A New approach to chiral perturbation theory for matter fields. 1996.
- [186] Paul J. Ellis and Hua-Bin Tang. Pion nucleon scattering in a new approach to chiral perturbation theory. *Phys.Rev.*, C57:3356–3375, 1998.
- [187] Vladimir Pascalutsa, Barry R. Holstein, and Marc Vanderhaeghen. A Derivative of the Gerasimov-Drell-Hearn sum rule. *Phys.Lett.*, B600:239–247, 2004.
- [188] L.S. Geng, J. Martin Camalich, L. Alvarez-Ruso, and M.J. Vicente Vacas. Leading $SU(3)$ -breaking corrections to the baryon magnetic moments in Chiral Perturbation Theory. *Phys.Rev.Lett.*, 101:222002, 2008.
- [189] L.S. Geng, M. Altenbuchinger, and W. Weise. Light quark mass dependence of the D and D_s decay constants. *Phys.Lett.*, B696:390–395, 2011.
- [190] L.S. Geng, J. Martin-Camalich, L. Alvarez-Ruso, and M.J. Vicente-Vacas. The Lowest-lying spin-1/2 and spin-3/2 baryon magnetic moments in chiral perturbation theory. 2010.
- [191] Lisheng Geng. Recent developments in $SU(3)$ covariant baryon chiral perturbation theory. *Front.Phys.China.*, 8:328–348, 2013.
- [192] Jose Antonio Oller, Michela Verbeni, and Joaquim Prades. Meson-baryon effective chiral lagrangians to $O(q^*3)$. *JHEP*, 0609:079, 2006.
- [193] V. Pascalutsa. Quantization of an interacting spin - 3 / 2 field and the Delta isobar. *Phys.Rev.*, D58:096002, 1998.
- [194] Vladimir Pascalutsa and Rob Timmermans. Field theory of nucleon to higher spin baryon transitions. *Phys.Rev.*, C60:042201, 1999.

- [195] Vladimir Pascalutsa and Marc Vanderhaeghen. The Nucleon and delta-resonance masses in relativistic chiral effective-field theory. *Phys.Lett.*, B636:31–39, 2006.
- [196] Johan Bijnens and Ilaria Jemos. A new global fit of the L_i^r at next-to-next-to-leading order in Chiral Perturbation Theory. *Nucl.Phys.*, B854:631–665, 2012.
- [197] Silas R. Beane. Nucleon masses and magnetic moments in a finite volume. *Phys.Rev.*, D70:034507, 2004.
- [198] Oliver Bar. Chiral perturbation theory at non-zero lattice spacing. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 140:106–119, 2005.
- [199] Stephen R. Sharpe and Jr Singleton, Robert L. Spontaneous flavor and parity breaking with Wilson fermions. *Phys.Rev.*, D58:074501, 1998.
- [200] Weon-Jong Lee and Stephen R. Sharpe. Partial flavor symmetry restoration for chiral staggered fermions. *Phys.Rev.*, D60:114503, 1999.
- [201] Gernot Munster and Christian Schmidt. Chiral perturbation theory for lattice QCD with a twisted mass term. *Europhys.Lett.*, 66:652–656, 2004.
- [202] Martin Luscher, Stefan Sint, Rainer Sommer, Peter Weisz, and Ulli Wolff. Nonperturbative $O(a)$ improvement of lattice QCD. *Nucl.Phys.*, B491:323–343, 1997.
- [203] R. Frezzotti and G.C. Rossi. Chirally improving Wilson fermions. 1. $O(a)$ improvement. *JHEP*, 0408:007, 2004.
- [204] Hong-Hao Zhang, Wen-Bin Yan, and Xue-Song Li. Trace Formulae of Characteristic Polynomial and Cayley-Hamilton’s Theorem, and Applications to Chiral Perturbation Theory and General Relativity. *Commun.Theor.Phys.*, 49:801, 2008.
- [205] G. Amoros, J. Bijnens, and P. Talavera. QCD isospin breaking in meson masses, decay constants and quark mass ratios. *Nucl.Phys.*, B602:87–108, 2001.
- [206] Massimiliano Procura, Thomas R. Hemmert, and Wolfram Weise. Nucleon mass, sigma term and lattice QCD. *Phys.Rev.*, D69:034505, 2004.
- [207] L. Alvarez-Ruso, T. Ledwig, J. Martin Camalich, and M.J. Vicente-Vacas. The nucleon mass and pion-nucleon sigma term from a chiral analysis of lattice QCD world data. *Phys.Rev.*, D88:054507, 2013.
- [208] Ping Chen. Heavy quarks on anisotropic lattices: The Charmonium spectrum. *Phys.Rev.*, D64:034509, 2001.
- [209] S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling, R. Hoffmann, S.D. Katz, et al. Scaling study of dynamical smeared-link clover fermions. *Phys.Rev.*, D79:014501, 2009.
- [210] Wen-Chen Chang and Jen-Chieh Peng. Flavor Structure of the Nucleon Sea. 2014.
- [211] Gunnar S. Bali et al. Strangeness Contribution to the Proton Spin from Lattice QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 108:222001, 2012.
- [212] Z. Ahmed et al. New Precision Limit on the Strange Vector Form Factors of the Proton. *Phys.Rev.Lett.*, 108:102001, 2012.

- [213] D. Androic et al. Strange Quark Contributions to Parity-Violating Asymmetries in the Backward Angle G0 Electron Scattering Experiment. *Phys.Rev.Lett.*, 104:012001, 2010.
- [214] Ross Daniel Young, Julie Roche, Roger D. Carlini, and Anthony William Thomas. Extracting nucleon strange and anapole form factors from world data. *Phys.Rev.Lett.*, 97:102002, 2006.
- [215] B.S. Zou and D.O. Riska. The s anti- s component of the proton and the strangeness magnetic moment. *Phys.Rev.Lett.*, 95:072001, 2005.
- [216] T.P. Cheng. Chiral Symmetry and the Higgs Nucleon Coupling. *Phys.Rev.*, D38:2869, 1988.
- [217] G. Aad et al. Expected Performance of the ATLAS Experiment - Detector, Trigger and Physics. 2009.
- [218] A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, and S. Scopel. Implications for relic neutralinos of the theoretical uncertainties in the neutralino nucleon cross-section. *Astropart.Phys.*, 13:215–225, 2000.
- [219] John R. Ellis, Keith A. Olive, Yudi Santoso, and Vassilis C. Spanos. Update on the direct detection of supersymmetric dark matter. *Phys.Rev.*, D71:095007, 2005.
- [220] John R. Ellis, Keith A. Olive, and Christopher Savage. Hadronic Uncertainties in the Elastic Scattering of Supersymmetric Dark Matter. *Phys.Rev.*, D77:065026, 2008.
- [221] A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, and S. Scopel. Interpreting the recent results on direct search for dark matter particles in terms of relic neutralino. *Phys.Rev.*, D78:083520, 2008.
- [222] Richard J. Hill and Mikhail P. Solon. Universal behavior in the scattering of heavy, weakly interacting dark matter on nuclear targets. *Phys.Lett.*, B707:539–545, 2012.
- [223] James M. Cline, Kimmo Kainulainen, Pat Scott, and Christoph Weniger. Update on scalar singlet dark matter. *Phys.Rev.*, D88:055025, 2013.
- [224] J. Gasser, H. Leutwyler, and M.E. Sainio. Sigma term update. *Phys.Lett.*, B253:252–259, 1991.
- [225] M.M. Pavan, I.I. Strakovsky, R.L. Workman, and R.A. Arndt. The Pion nucleon Sigma term is definitely large: Results from a G.W.U. analysis of pi nucleon scattering data. *PiN Newslett.*, 16:110–115, 2002.
- [226] Yun-Hua Chen, De-Liang Yao, and H.Q. Zheng. Analyses of pion-nucleon elastic scattering amplitudes up to $O(p^4)$ in extended-on-mass-shell subtraction scheme. *Phys.Rev.*, D87(5):054019, 2013.
- [227] J.M. Alarcon, J. Martin Camalich, and J.A. Oller. The chiral representation of the πN scattering amplitude and the pion-nucleon sigma term. *Phys.Rev.*, D85:051503, 2012.
- [228] K. Takeda et al. Nucleon strange quark content from two-flavor lattice QCD with exact chiral symmetry. *Phys.Rev.*, D83:114506, 2011.
- [229] Ronald Babich, Richard C. Brower, Michael A. Clark, George T. Fleming, James C. Osborn, et al. Exploring strange nucleon form factors on the lattice. *Phys.Rev.*, D85:054510, 2012.
- [230] G.S. Bali, P.C. Bruns, S. Collins, M. Deka, B. Glasle, et al. Nucleon mass and sigma term from lattice QCD with two light fermion flavors. *Nucl.Phys.*, B866:1–25, 2013.

- [231] Simon Dinter et al. Sigma terms and strangeness content of the nucleon with $N_f = 2+1+1$ twisted mass fermions. *JHEP*, 1208:037, 2012.
- [232] M. Engelhardt. Strange quark contributions to nucleon mass and spin from lattice QCD. *Phys.Rev.*, D86:114510, 2012.
- [233] H. Ohki et al. Nucleon strange quark content from $N_f = 2 + 1$ lattice QCD with exact chiral symmetry. *Phys.Rev.*, D87(3):034509, 2013.
- [234] M. Gong, A. Alexandru, Y. Chen, T. Doi, S.J. Dong, et al. Strangeness and charmness content of nucleon from overlap fermions on 2+1-flavor domain-wall fermion configurations. *Phys.Rev.*, D88:014503, 2013.
- [235] Constantia Alexandrou, Martha Constantinou, Simon Dinter, Vincent Drach, Kyriakos Hadjiyianakou, et al. Strangeness of the nucleon from Lattice Quantum Chromodynamics. 2013.
- [236] R. Horsley, Y. Nakamura, H. Perlt, D. Pleiter, P.E.L. Rakow, et al. Hyperon sigma terms for 2+1 quark flavours. *Phys.Rev.*, D85:034506, 2012.
- [237] P.E. Shanahan, A.W. Thomas, and R.D. Young. Sigma terms from an SU(3) chiral extrapolation. 2012.
- [238] Chulwoo Jung. Nucleon mass and strange content from (2+1)-flavor Domain Wall Fermion. *PoS, LATTICE2012*:164, 2012.
- [239] Parikshit Junnarkar and Andre Walker-Loud. The Scalar Strange Content of the Nucleon from Lattice QCD. *Phys.Rev.*, D87:114510, 2013.
- [240] P.E. Shanahan, A.W. Thomas, and R.D. Young. Scale setting, sigma terms and the Feynman-Hellman theorem. *PoS, LATTICE2012*:165, 2012.
- [241] R.P. Feynman. Forces in Molecules. *Phys.Rev.*, 56:340–343, 1939.
- [242] M.F.M. Lutz, R. Bavontaweepanya, C. Kobdaj, and K. Schwarz. On finite volume effects in the chiral extrapolation of baryon masses. *Phys.Rev.*, D90:054505, 2014.
- [243] R. Sommer. A New way to set the energy scale in lattice gauge theories and its applications to the static force and alpha-s in SU(2) Yang-Mills theory. *Nucl.Phys.*, B411:839–854, 1994.
- [244] Andre Walker-Loud. Evidence for non-analytic light quark mass dependence in the baryon spectrum. *Phys.Rev.*, D86:074509, 2012.
- [245] Sz. Borsanyi, S. Durr, Z. Fodor, J. Frison, C. Hoelbling, et al. Isospin splittings in the light baryon octet from lattice QCD and QED. *Phys.Rev.Lett.*, 111:252001, 2013.
- [246] Silas R. Beane, Kostas Orginos, and Martin J. Savage. Strong-isospin violation in the neutron-proton mass difference from fully-dynamical lattice QCD and PQCD. *Nucl.Phys.*, B768:38–50, 2007.
- [247] T. Blum, R. Zhou, T. Doi, M. Hayakawa, T. Izubuchi, et al. Electromagnetic mass splittings of the low lying hadrons and quark masses from 2+1 flavor lattice QCD+QED. *Phys.Rev.*, D82:094508, 2010.
- [248] R. Horsley et al. Isospin breaking in octet baryon mass splittings. *Phys.Rev.*, D86:114511, 2012.

- [249] G.M. de Divitiis et al. Leading isospin breaking effects on the lattice. *Phys.Rev.*, D87(11):114505, 2013.
- [250] J. Bijnens, H. Sonoda, and Mark B. Wise. ON THE VALIDITY OF CHIRAL PERTURBATION THEORY FOR WEAK HYPERON DECAYS. *Nucl.Phys.*, B261:185, 1985.
- [251] P. Hasenfratz and H. Leutwyler. Goldstone Boson Related Finite Size Effects in Field Theory and Critical Phenomena With $O(N)$ Symmetry. *Nucl.Phys.*, B343:241–284, 1990.
- [252] C. Aubin, C. Bernard, C. DeTar, J. Osborn, Steven Gottlieb, et al. Light hadrons with improved staggered quarks: Approaching the continuum limit. *Phys.Rev.*, D70:094505, 2004.
- [253] D. Toussaint and W. Freeman. The Strange quark condensate in the nucleon in 2+1 flavor QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 103:122002, 2009.
- [254] Walter Freeman and Doug Toussaint. The intrinsic strangeness and charm of the nucleon using improved staggered fermions. *Phys.Rev.*, D88:054503, 2013.
- [255] A. Semke and M.F.M. Lutz. Strangeness in the baryon ground states. *Phys.Lett.*, B717:242–247, 2012.
- [256] J. Beringer et al. Review of Particle Physics (RPP). *Phys.Rev.*, D86:010001, 2012.
- [257] Antonin Portelli. Review on the inclusion of isospin breaking effects in lattice calculations. *PoS*, KAON13:023, 2013.
- [258] Nazario Tantaló. Isospin Breaking Effects on the Lattice. 2013.
- [259] P.E. Shanahan, A.W. Thomas, and R.D. Young. Strong contribution to octet baryon mass splittings. *Phys.Lett.*, B718:1148–1153, 2013.
- [260] Sz. Borsanyi, S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling, S.D. Katz, et al. Ab initio calculation of the neutron-proton mass difference. 2014.
- [261] A.W. Thomas, X.G. Wang, and R.D. Young. Electromagnetic Contribution to the Proton-Neutron Mass Splitting. 2014.
- [262] F.B. Erben, P.E. Shanahan, A.W. Thomas, and R.D. Young. Dispersive estimate of the electromagnetic charge symmetry violation in the octet baryon masses. 2014.
- [263] Mart 柳n Gonz谩lez-Alonso and Jorge Martin Camalich. Isospin breaking in the nucleon mass and the sensitivity of β decays to new physics. *Phys.Rev.Lett.*, 112(4):042501, 2014.
- [264] Zohreh Davoudi and Martin J. Savage. Finite-Volume Electromagnetic Corrections to the Masses of Mesons, Baryons and Nuclei. *Phys.Rev.*, D90:054503, 2014.
- [265] N. Mathur, Y. Chen, S.J. Dong, Terrence Draper, I. Horvath, et al. Roper resonance and $S(11)(1535)$ from lattice QCD. *Phys.Lett.*, B605:137–143, 2005.
- [266] M.S. Mahbub, Waseem Kamleh, Derek B. Leinweber, Alan O Cais, and Anthony G. Williams. Ordering of Spin- $\frac{1}{2}$ Excitations of the Nucleon in Lattice QCD. *Phys.Lett.*, B693:351–357, 2010.
- [267] M.S. Mahbub, Alan O. Cais, Waseem Kamleh, Derek B. Leinweber, and Anthony G. Williams. Positive-parity Excited-states of the Nucleon in Quenched Lattice QCD. *Phys.Rev.*, D82:094504, 2010.

- [268] Georg P. Engel, C.B. Lang, Markus Limmer, Daniel Mohler, and Andreas Schafer. Meson and baryon spectrum for QCD with two light dynamical quarks. *Phys.Rev.*, D82:034505, 2010.
- [269] M. Selim Mahbub, Waseem Kamleh, Derek B. Leinweber, Peter J. Moran, and Anthony G. Williams. Roper Resonance in 2+1 Flavor QCD. *Phys.Lett.*, B707:389–393, 2012.
- [270] Robert G. Edwards, Jozef J. Dudek, David G. Richards, and Stephen J. Wallace. Excited state baryon spectroscopy from lattice QCD. *Phys.Rev.*, D84:074508, 2011.
- [271] Georg P. Engel, C.B. Lang, Daniel Mohler, and Andreas Schaffer. QCD with Two Light Dynamical Chirally Improved Quarks: Baryons. *Phys.Rev.*, D87(7):074504, 2013.
- [272] C. Alexandrou, T. Korzec, G. Koutsou, and T. Leontiou. Nucleon Excited States in $N_f=2$ lattice QCD. *Phys.Rev.*, D89(3):034502, 2014.
- [273] Keh-Fei Liu, Ying Chen, Ming Gong, Raza Sufian, Mingyang Sun, et al. The Roper Puzzle. *PoS, LATTICE2013*:507, 2014.
- [274] B. Borasoy, P.C. Bruns, U.-G. Meissner, and R. Lewis. Chiral corrections to the Roper mass. *Phys.Lett.*, B641:294–300, 2006.
- [275] Daniel Mohler, C.B. Lang, Luka Leskovec, Sasa Prelovsek, and R.M. Woloshyn. $D_{s0}^*(2317)$ Meson and D -Meson-Kaon Scattering from Lattice QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 111(22):222001, 2013.
- [276] Sasa Prelovsek and Luka Leskovec. Evidence for $X(3872)$ from DD^* scattering on the lattice. *Phys.Rev.Lett.*, 111:192001, 2013.
- [277] Sasa Prelovsek and Luka Leskovec. Search for $Z_c^+(3900)$ in the 1^{+-} Channel on the Lattice. *Phys.Lett.*, B727:172–176, 2013.
- [278] Ying Chen, Ming Gong, Yu-Hong Lei, Ning Li, Jian Liang, et al. Low-energy scattering of the $(D\bar{D}^*)^\pm$ system and the resonance-like structure $Z_c(3900)$. *Phys.Rev.*, D89(9):094506, 2014.
- [279] P. Wang and X.G. Wang. Study on $X(3872)$ from effective field theory with pion exchange interaction. *Phys.Rev.Lett.*, 111(4):042002, 2013.
- [280] M. Altenbuchinger, L. S. Geng, and W. Weise. Scattering lengths of Nambu-Goldstone bosons off D mesons and dynamically generated heavy-light mesons. *Phys.Rev.*, D89:014026, 2014.
- [281] F. Aceti, M. Bayar, E. Oset, A. Martinez Torres, K.P. Khemchandani, et al. Prediction of an $I = 1$ $D\bar{D}^*$ state and relationship to the claimed $Z_c(3900)$, $Z_c(3885)$. *Phys.Rev.*, D90(1):016003, 2014.